

# О РОЛИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПАРАДОКСОВ В ПРОГРАММЕ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ НЕОЛОГИЦИЗМА

**Олейник Полина Ивановна** – кандидат философских наук, старший научный сотрудник. Томский научный центр СО РАН. Российская Федерация, 634055, г. Томск, пр. Академический, д. 10/4; e-mail: [polina-grigorenko@mail.ru](mailto:polina-grigorenko@mail.ru)

В статье обсуждаются аспекты программы философии математики неологизма, связанные с существованием парадоксов. Отмечается недостаточная тематизированность проблемы парадоксов в программе неологизма. Несмотря на это, использование в неологизме методологии введения понятий с помощью принципов абстракции ограничено существованием принципов абстракции, приводящих к противоречию. Основная проблема неологизма, «проблема плохой компании», связана с обсуждением таких принципов. Автор статьи показывает, что поиск единого критерия для демаркации приемлемых и неприемлемых принципов абстракции не приводит к необходимому результату.

**Ключевые слова:** Г. Фреге, парадокс Рассела, К. Райт, неологизм, принцип Юма, принципы абстракции, проблема «плохой компании»

# ON THE ROLE OF THE EXISTENCE OF PARADOXES IN THE PROGRAM OF THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS OF NEOLOGICISM

**Polina I. Oleinik** – PhD in Philosophy, Senior Researcher. Tomsk Scientific Center, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. 10/4 Akademicheskyy Ave., Tomsk 634055, Russian Federation; e-mail: [polina-grigorenko@mail.ru](mailto:polina-grigorenko@mail.ru)

The article discusses aspects of the philosophy of mathematics of neologism related to the existence of paradoxes. The problem of paradoxes is not sufficiently themed in the neologism programme. However, the use of the methodology of introducing concepts by abstraction principles is limited by the existence of abstraction principles that lead to a contradiction. The main problem of neologism, The Bad Company Objection relates with the discussion of such principles. The author of the article shows that the search for a uniform criterion for the demarcation of acceptable and unacceptable principles of abstraction did not lead to the necessary result.

**Keywords:** G. Frege, Russell's paradox, C. Wright, neologism, Hume's principle, principles of abstraction, the Bad Company Objection



Статья В.А. Ладова посвящена рассмотрению актуальной темы [Ладов, 2023]. Особое место проблематика парадоксов занимает в философии математики. Данная реплика посвящена обсуждению роли парадоксов в современной философии математики в программе неологицизма К. Райта и Б. Хейла.

Исторически именно философия математики стала той дисциплиной, в рамках которой проблематичность существования парадоксов приобрела острый характер. Парадокс был обнаружен в основаниях программы логицизма Г. Фреге Б. Расселом. Одной из основополагающих идей Г. Фреге было введение Аксиомы V, которая сопоставляет каждое понятие с уникальным объектом – его объемом. Г. Фреге дает эксплицитные определения отдельных чисел с точки зрения экстенциональности: число  $F$  определяется как объем понятия, «равночисленного  $F$ ». В построенной Г. Фреге системе объемы можно рассматривать как множества: число  $F_s$ , таким образом, это множество всех понятий, равночисленных с понятием  $F$  ( $0$  – множество всех понятий, под которые ничего не подпадает;  $1$  – множество всех «единично представленных» понятий и т.д.). Согласно Аксиоме V, можно сказать, что каждое понятие должно иметь объем. Б. Рассел показал, что при рассмотрении понятия множества всех множеств Аксиома V приводит к противоречию. Знаменитый парадокс изложен в письме Б. Рассела к Г. Фреге в 1902: «Пусть  $w$  – это класс всех тех классов, которые не являются элементами самих себя. Тогда, каким бы ни был класс  $x$ , ‘ $x$  есть  $w$ ’ эквивалентно ‘ $x$  не есть  $x$ ’. Поэтому, если  $x$  придать значение  $w$ , то ‘ $w$  есть  $w$ ’ эквивалентно ‘ $w$  не есть  $w$ ’» [Рассел, 2006, с. 16].

Сам Г. Фреге так и не нашел способ преодолеть поставленную парадоксом проблему. В работах Б. Рассела и А.Н. Уайтхеда, Ф.П. Рамсея, Р. Карнапа и других предлагались разные решения для того, чтобы блокировать парадоксы в системе Г. Фреге. Со временем интерес к логицизму угас, и вплоть до 1980-х гг. он обсуждался лишь в историческом контексте. В 1983 г. была издана книга К. Райта «Концепция Фреге чисел как объектов» [Wright, 1983]. К. Райт в соавторстве с Б. Хейлом предлагает использовать вместо Аксиомы V так называемый принципа Юма, согласно которому два понятия являются равночисленными, если и только если существует взаимно-однозначное соответствие между ними. Используя принцип Юма и логику второго порядка, неологицизм предоставляет определение числа и выводит основные понятия и положения арифметики.

Стоит отметить, что в околонеологицистской литературе крайне редко тематизируется проблематика парадоксов. Учитывая историческую подоплеку неологицизма, это достаточно интересный факт. Как правило, то, что Аксиома V приводит к противоречию, а принцип Юма не приводит, утверждается как общеизвестный и не требующий разъяснения факт. К. Райт «тестирует» принцип Юма на возможность выведения из него парадокса Рассела [Ibid., p. 155]. Мы не будем



воспроизводить его доказательство во всех технических деталях, но суть заключается в следующем: по аналогии с оригинальным парадоксом Рассела, он вводит и проверяет  $s$ , число чисел, которые не подпадают ни под одно из понятий, числами которых они являются. Когда мы зададимся вопросом, подпадает ли  $s$  под свое собственное определяющее условие, из рассуждения не вытекает противоречие. Последующие исследования связаны с понятием «бесконечной расширяемости», предлагаемым для блокирования возможности построения понятия числа всех чисел, которое можно получить при использовании принципа Юма.

Однако проблема парадоксов в рамках программы неологицизма проявляется другим образом. Методология неологицизма связана с использованием принципов абстракции. Общая идея принципов абстракции заключается в том, что они позволяют вводить новые термины путем определения условий тождества для референтов новых терминов с использованием уже имеющихся лингвистических ресурсов. Особенности и границы применения принципов абстракции активно обсуждаются в современной литературе [Fine, 2002]. Использование принципов абстракции приводит к наиболее обсуждаемой в околонеологицистской литературе так называемой проблеме «плохой компании» (*The Bad Company Objection*). Эта проблема связана с существованием противоречивых принципов абстракции (наиболее известным примером является Аксиома V Фреге): несмотря на то, что сам принцип Юма не является противоречивым, он имеет аналогичную форму. Критика такого рода исходит из следующего вопроса: учитывая существование проблемных принципов той же общей формы, что и принцип Юма, какова причина полагать, что существуют «хорошие» принципы абстракции, которые будут играть такую серьезную роль, которую отводит им неологицизм?

В качестве решения этой проблемы предлагается установление некоторых общих критериев для демаркации приемлемых и неприемлемых принципов абстракции. Одним из таких критериев является непротиворечивость: Аксиома V в таком случае окажется «плохим» принципом, принцип Юма (как ожидается) «хорошим». Однако исследования показали, что непротиворечивость хоть и необходимый, но недостаточный критерий. Дж. Булос [Bulos, 1999c] демонстрирует, что существуют непротиворечивые принципы абстракции, несовместимые с принципом Юма. Н. Теннант [Tennant, 1997] и Дж. Булос [Bulos, 1999a] выступают против образования понятий путем абстракции как допустимой процедуры для проекта, претендующего на связь с логицизмом. Они приводят примеры различных противоречивых принципов абстракции, и некоторые из этих принципов имеют большую схожесть с самим принципом Юма (например, принцип упорядоченности, введенный в [Hazen, 1985], влечет противоречие из парадокса Бурали-Форти; вместе с тем этот принцип кажется



аналогичным принципу Юма, но используемым для порядковых чисел, а не кардинальных). Предлагается также критерий консервативности, согласно которому принцип абстракции является приемлемым, если его введение не имеет существенных последствий для тех понятий, с введением которых он сам эксплицитно не связан. Был предложен ряд других критериев для демаркации принципов абстракции [Eklund, 2006; Fine, 2002]. Общий результат дискуссий по этой проблеме заключается в том, что релевантный список критериев, который бы утвердил все принципы абстракции, которые вводит неологизм, пока отсутствует.

Таким образом, парадоксы в неологизме занимают серьезное место. Они не тематизируются, однако им отводится «проверочная» роль. Вместо обсуждения причин парадоксов и способов их устранить авторы окологнеологистской литературы рассматривают парадоксы как границы применения методологии.

Не обсуждается и связь Аксиомы V и парадокса Рассела: их связь постулируется, но не становится предметом исследования. Однако в современной логической литературе причина образования парадоксов является дискуссионной. Новые результаты могут стать основой для пересмотра статуса самой Аксиомы V: возможно, Аксиома V при введении релевантного ограничения применения теории классов имеет перспективы дальнейшего применения. Здесь стоит упомянуть появление в литературе такого принципа абстракции, как New V. Дж. Булос [Boolos, 1999b] видит решение парадокса Рассела во введении ограниченной по размеру концепции множеств: New V представляет отдельный объект (экстенционал или, более свободно, множество) для совокупности объектов при условии, что она меньше, чем все множество. Понятия, которые содержат столько объектов, сколько есть в множестве, однако, получают один и тот же абстрактный «плохой» объект. Используя New V, можно вывести многие из стандартных теоретико-множественных аксиом. Несмотря на то, что New V не позволяет реконструировать всю стандартную теорию множеств, этот принцип имеет большие перспективы; предлагается также его модифицированный вариант, принцип абстракции Newer V [Cook, 2007]. Вместе с тем он является хорошим примером попытки не устранить Аксиому V, но найти такую модификацию, которая смогла бы выполнять задачи логицизма, не приводя при этом к возникновению парадоксов.

Отметим также некоторую схожесть подходов к решению проблем существования самореферентных парадоксов и проблемы «плохой компании». В.А. Ладов указывает на проблемы унифицированного подхода к решению логико-семантических парадоксов и приходит к выводу о том, что решение парадоксов посредством полного устранения самореферентности является неоправданно категоричным. Подобный подход имеет место и с принципами абстракции: традиционно



в литературе утверждается, что существование «плохих» принципов абстракции ставит под сомнение саму возможность использования этой методологии. Однако К. Райт отмечает, что тот факт, что методология иногда приводит к ошибочным выводам, не означает, что она сама ошибочна. Обсуждая этот вопрос, Р. Хек [Heck, 1999] задается вопросом: почему необходимо показать, что процедура будет работать независимо от того, какой принцип абстракции используется? Полный запрет на самореферентность в качестве решения проблемы парадоксов перекликается с критической оценкой использования принципов абстракции как методологии по причине существования противоречивых принципов абстракции. Отсутствие единого критерия для отделения «плохих» принципов от «хороших» оценивается как невозможность признать продуктивные результаты программы неологицизма, построенной на принципе Юма, который, несмотря на существующую проблему, все же оценивается как «хороший». Принцип Юма не принимается не в силу содержательной составляющей, но по причине того, что другие похожие принципы абстракции приводят к парадоксам. Поиск необходимого и достаточного критерия для определения приемлемости принципа абстракции действительно важен. Тем не менее отметим, что более точное решение проблемы может быть связано с поиском истинной причины противоречивости принципов абстракции, а не с отменой легитимности использования этой методологии.

Таким образом, показано, что проблема парадоксов в современной философии математики в рамках программы неологицизма К. Райта и Б. Хейла имеет большое значение. Несмотря на то, что эта проблема эксплицитно не тематизируется, существование парадоксов блокирует многие современные идеи, и решение задач неологицизма во многом зависит от результатов исследований причин возникновения парадоксов.

### Список литературы

Ладов, 2023 – *Ладов В.А.* О принципе единого решения парадоксов // Эпистемология и философия науки. 2023. Т. 60. № 3. С. 17–30.

Рассел, 2006 – *Рассел Б.* Математическая логика, основанная на теории типов / Пер. с англ. В.А. Суровцева // Логика, онтология, язык. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 16–62.



## References

Boolos, 1999a – Boolos, G. “Is Hume’s Principle Analytic?” in: *Logic, Logic and Logic*. Harvard University Press, 1999, pp. 301–314.

Boolos, 1999b – Boolos, G. “Iteration Again”, in: *Logic, Logic and Logic*. Harvard University Press, 1999, pp. 88–104.

Boolos, 1999c – Boolos, G. “The Standard Equality of Numbers”, in: *Logic, Logic and Logic*. Harvard University Press, 1999, pp. 202–219.

Cook, 2007 – Cook, R.T. (ed.) *The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction. The Western Ontario Series in Philosophy of Science*. Dordrecht: Springer, 2007, no. 71, xxxviii + 454 p.

Eklund, 2006 – Eklund, M. “Neo-Fregean Ontology”, *Philosophical Perspectives*, 2006, no. 20, pp. 95–121.

Fine, 2002 – Fine, K. *The Limits of Abstraction*. Oxford: Clarendon Press, 2002, 216 p.

Hazen, 1985 – Hazen, A. “Review of Crispin Wright’s Frege’s Conception of Numbers as Objects”, *Australasian Journal of Philosophy*, 1985, no. 63 (2), pp. 251–254.

Heck, 1999 – Heck, R. “Frege’s Theorem: An Introduction”, *The Harvard Review of Philosophy*, 1999, no. 7 (1), pp. 56–73.

Klement, 2012 – Klement, K. “Neo-logicism and Russell’s Logicism”, *Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies*, 2012, vol. 32 (127), pp. 127–152.

Ladov, V.A. “O principe edinogo resheniya paradoksov” [On the principle of Uniform Solution of Paradoxes], *Epistemology & Philosophy of Science*, 2023, vol. 60, no. 3, pp. 17–30. (In Russian)

Russell, B. “Matematicheskaya logika, osnovannaya na teorii tipov” [Mathematical Logic as Based on the Theory of Types], trans. by V.A. Surovtsev, in: Surovtsev, V.A. (ed.) *Logika, ontologiya, yazyk* [Logic, ontology, language]. Tomsk: Tomsk University Press, 2006, pp. 16–62. (In Russian)

Tennant, 1997 – Tennant, N. “On the Necessary Existence of Numbers”, *Noûs*, 1997, vol. 31, no. 3, pp. 307–336.

Wright, 1983 – Wright, C. *Frege’s Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen: University Press, 1983, 194 p.