Эпистемология и философия науки
2023. Т. 60. № 3. С. 31–38
УДК 167.7

Epistemology & Philosophy of Science
2023, vol. 60, no. 3, pp. 31–38
DOI: https://doi.org/10.5840/eps202360337

Поиски единообразного решения парадоксов: иллюзия простоты

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор.
Институт философии и права Сибирского отделения РАН.
Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, ул. Николаева, д. 8;
e-mail: leitval@gmail.com

В статье обсуждаются предложения Ладова [Ладов, 2023] по единообразному решению классических теоретико-множественных и семантических парадоксов. Показывается, что подход Ладова сталкивается с двумя трудностями. Во-первых, метод устранения отрицания из формулировок парадоксов приводит к новым парадоксам, что демонстрируется на примере теоремы Лёба. Во-вторых, апелляция в аргументации Ладова к «схеме» Рассела», принятой Г. Пристом, не является значимой, ввиду диалетеизма Приста, согласно которому допускаются противоречия. Последнее обстоятельство препятствует единообразному решению парадоксов, предлагаемому Ладовым.

Ключевые слова: парадокс, самореферентность, единообразное решение, теорема Лёба, диалетеизм Приста

The search for a uniform solution to paradoxes: the illusion of simplicity

Vitaly V. Tselishchev –
Dsc in Philosophy, Professor.
Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.
8 Nikolaeva Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation;
e-mail: leitval@gmail.com

The article discusses Ladov’s proposals for a uniform solution of classical set-theoretic and semantic paradoxes. It is shown that Ladov’s approach faces two difficulties. Firstly, the method of eliminating negation from the formulations of paradoxes leads to new paradoxes, which is demonstrated by the example of Loeb’s theorem. Secondly, the appeal in Ladov’s argumentation to the “Russell scheme” adopted by G. Priest is not significant, due to Priest's dialetheism, according to which contradictions are allowed. The latter circumstance prevents a uniform solution of the paradoxes proposed by Ladov.

Keywords: paradox, self-reference, uniform solution, Loeb’s theorem, Priest’s dialetheism

В своей работе Ладов представил перспективы единообразного решения классических теоретико-множественных и семантических парадоксов. В отличие от традиционного их рассмотрения в виде отдельных групп, Ладовым предполагается единая природа парадоксов, заключающаяся в феномене самореферентности. Самореференция в математике и логике может быть достигнута несколькими способами. Р. Смаллиан отмечает, среди более специфических, следующие из них. Во-первых, это контекст противопоставления употребления и упоминания. Во-вторых, это метод диагонализации. Наконец, самый известный, это геделевская нумерация [Smullyan, 2013, p. 77]. Ладов делает упор на понимании самореферентности как выделении или конструировании некоего элемента e, который и ответственен за появление противоречия или парадокса. Этот элемент входит в утверждение *p*, которое и является самореферентным. Далее мы просто говорим об элементе «*e*», роль которого видна из приводимой Ладовым структуры парадоксов («структура Рассела»)

(1) $w = \{x: p(x)\}$
(1) $e \in x$
(2) $(e \in w) \& (e \notin w)$

Скажем, в парадоксе Рассела элемент «*e*» содержит самореферентость, поскольку в качестве «*e*» выступает класс *w*, который содержит себя самого. Соответственно, преодоление парадокса состоит в запрете на образование класса *w* (т.е. запрет на образование элемента *e*). Усмотрение такого критического элемента *e* во всех парадоксах является целью подхода Ладова. Более точно, самореферентность хотя и является необходимой причиной всех классических парадоксов, но почти никогда не является их достаточной причиной. В подавляющем большинстве случаев парадокс возникает не за счет самореферентного элемента *e* как такового, а за счет специфического свойства *p*, по которому в класс *w* попадают элементы *x*, если ориентироваться на ту формальную структуру парадоксов, которую мы условно назвали «Структурой Рассела».

Другими словами, хотя решение парадоксов напрашивается в виде устранения этого несколько таинственного элемента «е», сам по себе этот шаг представляется Ладову слишком радикальным шагом, и весь его замысел в разрешении парадоксов состоит в том, чтобы перенести центр тяжести на «внутреннюю структуру» элемента «е». Дело в том, что этот элемент всегда идет в сопровождении отрицания, и именно оно ответственно за появление парадокса. По примеру «излечения» парадокса Рассела, Ладов диагносцирует ситуацию следующим образом:

«Однако важно отметить, что сам по себе элемент *e* еще не приводит к парадоксальной ситуации. Зафиксированный в Структуре Рассела элемент *e* можно назвать необходимой, но недостаточной причиной возникновения почти всех рассмотренных выше парадоксов. Достаточной же причиной, точным и специфическим условием, при котором возникает парадокс, является не элемент *e*, а, скорее, то свойство *p* в Структуре Рассела, на основе которого образуется класс *w*… Парадокс Рассела возможен только в том случае, если в свойстве *p*, по которому элементы *x*, собираются в класс *w*, присутствует отрицание. Свойство *p* должно указывать на классы, которые не содержат себя в качестве собственных элементов. Если же такое свойство *p* отсутствует, то даже наличие самореферентного элемента *e* в Структуре Рассела не ведет к парадоксу» [Ладов, 2023, с. 26].

Так что единообразное решение парадоксов обеспечивается устранением из элементов «е» отрицания. Но такой шаг опасен и может быть уподоблен ситуации, когда для излечения головной боли надо просто отрубить голову. В этой связи представляет интерес следующая оценка введения отрицания именно в связи с парадоксами. «Потрясающе умная идея Рассела состояла в том, чтобы рассмотреть свойство *не* быть членом самого себя» [Теннант, 2022, p. 448]. Получается, что если бы не было этих самых «не», не было бы парадоксов. Здесь Ладов апеллирует к Вригту, который ввел термин «существенная отрицательность» для характеристики тех форм рассуждений, включающих отрицание, которые приводят к образованию парадоксов. «Можно сказать, что антиномии Греллинга, Рассела и Лжеца устанавливают или демонстрируют “существенную отрицательность” некоторых понятий» [Вригт, 1986, p. 447].

Следует согласиться с Вригтом в том, что «существенная отрицательность» немедленно создает парадоксы, но тогда возникает вопрос, не связано ли оно фиксацией других более фундаментальных вопросов, например с вопросом о постулировании слишком больших абстрактных сущностей, которые слишком велики, чтобы быть множествами (именно такова по большей части нынешняя реакция на парадокс Рассела). Другими словами, существенная отрицательность есть скорее симптом, нежели причина появления парадоксов. В любом случае, если это не так, Ладову следовало бы более подробно остановиться на аргументации Вригта и ее значимости для математических парадоксов.

Простой рецепт устранения парадоксов изъятием отрицания из «элемента e», даже с учетом роли «существеннной отрицательности» фон Вригта, вряд ли осуществим. Дело в том, что отрицание так тесно переплетено в структуре парадоксов с множеством других концепций, что его замена на утверждение может привести к глубоким концептуальным следствиям. Рассмотрим утверждение, содержание которого очень близко к парадоксальному, а именно Гёделево доказуемое неразрешимое предложение G, которое (в пересказе) говорит о себе самом, что оно не доказуемо. Самореферентность этой конструкции сильнейшим образом связана с самореферентностью парадокса Лжеца, обходя его «по касательной», имея дело с доказательством вместо истины. Вопрос о том, имеет ли здесь решающее значение это самое «не» в не-доказуемости, ведет к одному из самых интригующих развитий в метаматематике. Можно ли устранить это отрицание, избегая «полу-парадоксальности» Гёделева предложения, как что-то вроде того рекомендует Ладов? Это устранение должно дать симметричное, уже утвердительное, а не отрицательное предложение. Рассмотрим эту ситуацию, которая имеет решающее значение, более внимательно.

Пусть имеется формальная система $\sum$, в которой рассматривается утверждение φ. По теореме Гёделя, $\sum \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$, где угловые скобки обозначают Гёделев номер утверждения φ, а Pr – предикат доказуемости в формальной системе. Эта формула может быть интерпретирована как утверждение φ о своей недоказуемости. Исходя из расплывчатых соображений о симметрии, рассмотрим очень похожую формулу, но уже без «не», $\sum \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Pr}\,(\ulcorner\varphi\urcorner)$, где утверждение φ говорит о своей доказуемости. Л. Генкин поставил вполне допустимый вопрос: если φ у Гёделя говорит о своей **не**-доказуемости и приведенные формулы похожи, является ли φ доказуемой [Henkin, 1952]. Проблема оказалась трудной, и ее решение связано с рядом догадок и результатов о природе гёделевского доказательства.

М. Лёб нашел решение проблемы Генкина, и это решение является чисто метаматематическим [Lob, 1955]. В определенном отношении эта тенденция все большего разрыва реальной математики и метаматематики является крайне интересной. Дело в том, что парадоксы, имеющие прежде всего философский интерес, стали предметом чисто математических исследований, скажем, в аксиоматической теории множеств, с соответствующим угасанием собственно философского интереса к ним. Теорема Лёба возвращает интерес к парадоксам, предлагая новый парадокс. Сама теорема формулируется так: Если $\sum \vdash \mathrm{Pr}\ulcorner\psi\urcorner \rightarrow \psi$, тогда $\sum \vdash \psi$.

Своей теоремой Лёб решил вопрос, поставленный Генкиным: если формальная система ∑ доказывает «если ∑ доказывает ψ, тогда ψ», тогда ∑ доказывает ψ (так что предложение Генкина доказуемо в ∑).

Чисто метаматематический характер теоремы Лёба, в отличие от математического, виден в том, что эта теорема довольно странный принцип для доказательства теорем о натуральных числах. Для того чтобы доказать утверждение A, допустимо предположить в качестве посылки, что φ доказуемо в PA (Арифметике Пеано). Потому что если есть доказательство в PA «если есть доказательство в PA утверждения φ, тогда φ», тогда есть доказательство φ в PA. Этот принцип не имеет известных приложений при доказательстве математических теорем о простых числах или других традиционных математических темах, но используется в метаматематике.

Этот принцип кажется больше помехой, чем просто странным. Как можно допускать в доказательстве φ, что φ доказуемо в PA? В конце концов, что доказуемо в PA, истинно, поэтому разве мы не можем заключить без дальнейшего добавления, что φ истинно, и таким образом доказать φ без размышлений вообще? Существенно здесь то, что допустимо предполагать, что φ доказуемо в PA при доказательстве φ, только если размышление, ведущее от предположения, что φ доказуемо в PA, к заключению φ, может быть выполнено на самом деле в рамках PA.

Эта странность подчеркивается К. Сморински в сопоставлении со Второй теоремой Гёделя: «Там, где гёделевская Вторая теорема просто утверждает недоказуемость непротиворечивости теории в самой теории, Теорема Лёба превосходит это, и характеризует эти примеры обоснованности, доказуемые в теории как тривиально доказуемые». [Smorynski, 119]. Этот результат, по мнению Сморински, является в высочайшей степени именно метаматематическим. Его философская важность состоит, среди прочего, в том, что он возвращает нас к парадоксам, но уже несколько иного рода. Действительно, доказательство теоремы Лёба в высшей степени напоминает парадокс Карри, который представляет собой версию парадокса Рассела, но уже без использования отрицания. Да и само происхождение теоремы Лёба обязано исследованию следствий устранению отрицания в полупарадоксальном конструирования самореферентного гёделевого предложения. Парадоксальность самой теоремы Лёба у Смаллиана обыгрывается как проблема самовыполнимых вер [Смаллиан, 2013, с. 203].

В модальном представлении теории доказательства [Boolos, 1993, p. 56] один из шагов доказательства теоремы Лёба (которая в этом представлении имеет вид «если $\sum \vdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$, тогда $\sum \vdash \varphi$») состоит в переходе от очевидного в качестве посылки утверждения $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ к утверждению $\gamma \leftrightarrow (\Box\gamma \rightarrow \varphi)$, применением Диагональной Леммы. Парадоксальность Теоремы Лёба лучше всего видна при интерпретации $\Box$ как предиката истины. В этом случае оператор $\Box$ обозначает «истинно», и $\Box\varphi$ – утверждение, что φ истинно. Здесь парадоксальный момент состоит в том, что φ может означать любое утверждение, даже заведомо ложное. Если мы повторим вышеприведенный вывод, только уже с новой интерпретацией оператора $\Box$, то самой подозрительной в отношении возникновения парадокса является как раз строка с $\gamma \leftrightarrow (\Box\gamma \rightarrow \varphi)$. Если γ истинное утверждение, тогда в результате всего вывода мы получаем истинность любого утверждения φ. В свою очередь, подозрительность относительно этой строки распространятся на утверждение γ, которое мы вводим постулированием.

Этот парадокс достаточно серьезен. Как утверждает П. Смит, «Не ясно, каков самый лучший способ блокирования этого парадокса, в любом случае, не более ясно, чем в случае Парадокса Лжеца. Без сомнения, есть что-то сомнительное о постулировании утверждения γ, такого, что справедливо $\gamma \leftrightarrow (\Box\gamma \rightarrow \varphi)$, но *что* в точности?» [Smith, 2013, p. 256].

Таким образом, вместо разрешения парадоксов путем замены отрицания утверждением мы получаем новые парадоксы, объяснение которых является довольно трудной задачей. Этого вполне достаточно, чтобы усомниться в обоснованности идеи устранения из элемента *e* отрицания как средства в едином способе разрешения всех парадоксов. Нет, очевидно, ничего хуже, чем разрешение одних парадоксов за счет появления других.

Есть еще одно сомнение в обоснованности единообразного решения парадоксов в той форме, которую предлагает Ладов. Сама идея единообразного решения парадоксов не часто встречается в нынешних дискуссиях по поводу относительно «старых» парадоксов, которые приведены в списке Ладова. Скажем, парадокс Лжеца, как неоднократно замечал сам Ладов в своих работах, интенсивно обсуждается с самых разных точек зрения на предмет поиска удовлетворительного его разрешения. Любопытно и помещение парадокса из «старого» списка, а именно парадокса Бурали-Форти, в разряд тех, которые не подпадают под диагноз, связанный с «элементом е», что нарушает стройность предлагаемого рецепта.

Одна из заметных попыток единообразного решения связана с осмыслением парадоксов в рамках диалетеизма Г. Приста [Прист, 2021]. В параграфе 11.5. «Принцип единообразного решения» утверждается следующее: «Чтобы убедить себя в том, что два парадокса одного и того же вида, мы должны убедиться, в том (a), что существует структура, общая для парадоксов, (b) что эта структура несет ответственность за противоречия. Условие (b) является одновременно существенным и трудным для формулирования» [Там же, с. 269].

В статье Ладова можно найти прямые подтверждения его солидарности с позицией Приста. Однако между ними есть очень важные расхождения. Ладов приводит явную схему формальной структуры парадоксов, выписанную на языке теории множеств, под названием «структура Рассела». Практически то же название употребляет и Прист. Но язык формальной, если ее так можно назвать», схемы парадоксов принципиально иной, и даже не столько язык, сколько концептуальная структура. Как пишет сам Прист: «...инстинкт Рассела был верен. Все традиционные парадоксы самореференции – это противоречия вложения. То есть, структура, описанная в Схеме Вложения, объясняет все эти противоречия» [Там же, с. 270].

Вложение – это особый элемент в машинерии диалетеизма – направления, согласно которому существуют истинные противоречия. Из самого этого факта ясно, что сама Схема Вложения представляет собой нечто радикально отличное от классических представлений, к которым обращается Ладов. Схема Вложения имеет дело со свойствами φ и ψ и функцией δ, такими что:

(1) $\Omega = \{y; \varphi(y)\}$ существует и $\psi(\Omega)$ Существование
(2) если $x \subseteq \Omega$ и $\psi(x)$
(a) $\delta(x) \notin x$ Трансцендентность
(b) $\delta(x) \in \Omega$ Замыкание

Как видно, (a) и (b) представляют две взаимно противоречивые операции.

Понятия Трансцендентности и Замыкания, определенные в теоретико-множественном языке, демонстрируют приемлемость противоречия. Такой концептуальный аппарат не дает никаких преимуществ тому, кто пытается дать единообразный рецепт для разрешения всех парадоксов, исходя из классических представлений.

Как при этом Прист разрешает парадоксы, это другое дело. Но неявно подразумеваемый Ладовым параллелизм его подхода и подхода Приста очевидно необоснован. Это означает, что сама идея единообразного решения парадоксов требует более тщательной разработки, если это делается в рамках классических языков и концептуальных схем.

Список литературы

Вригт, 1986 – *Вригт Г.Х., фон*. Гетерологический парадокс / Пер. с англ. Г.И. Галантера // *Вригт Г.Х., фон*. Логико-философские исследования: Избр. труды. М.: Прогресс, 1986. С. 449–482.

Ладов, 2023 – *Ладов В.А.* О принципе единого решения парадоксов // Эпистемология и философия науки. 2023. Т. 60. № 3. С. 17–30.

Прист, 2021 – *Прист Г.* За пределами мысли / Пер. с англ. В.В. Целищева. М.: Канон+, 2021.

Смаллиан, 2013 – *Смаллиан Р.* Вовеки неразрешимое / Пер. с англ. В.В. Целищева. М.: Канон+, 2013.

Теннант, 2023 – *Теннант Н.* Философия: введение в аналитическую традицию / Пер. с англ. В.В. Целищева. М.: Канон+, 2023.

References

Boolos, 1993 – Boolos, G. *The Logic of Provability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

Henkin, 1952 – Henkin, L. “Problem”, *Journal of Symbolic Logic*, 1952, vol. 17, p. 160.

Ladov, V.A. “O principe edinogo resheniya paradoksov” [On the Principle of Uniform Solution of Paradoxes], *Epistemology & Philosophy of Science*, 2023, vol. 60, no. 3, pp. 17–30. (In Russian)

Löb, 1955 – Löb, M.H. “Solution of a Problem by Leon Henkin”, *Journal of Symbolic Logic*, 1955, vol. 20, pp. 115–118.

Priest, G. *Za predelami mysli* [Beyond the Limit of Thought], trans. by V.V. Tselishchev. Moscow: Kanon+, 2022. (Trans. into Russian)

Smith, 2013 – Smith, P. *An Introduction to Gödel’s Theorems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

Smorynski, 1991 – Smorynski, C. “The Development of Self-Reference: Lob’s Theorem”, in: Drucker, T. (ed.) *Perspectives on the History of Mathematical Logic*. Birkhäuser, 1991, pp. 110–133.

Smullyan, 2013 – Smullyan, R. *Gödelian Puzzle Book*. New York: Dover Publishers, 2013. Ch. VIII.

Smullyan, R. *Voveki nerazreshimoje* [Forever Undecided], trans. by V.V. Tselishchev. Moscow: Kanon+, 2013. (Trans. into Russian)

Tennant, N. *Filosofija: vvedenije v analiticheskuju traditsiju* [Introducing Philosophy], trans. by V.V. Tselishchev. Moscow: Kanon+, 2022, 464 pp. (Trans. into Russian)

Wright, G.H. von. “Geterologicheskij paradoks” [The Heterological Paradox], trans. by G.I. Galanter, in: G.I. Ruzavin, V.A. Smirnov (eds.) *Logiko-filosofskie issledovaniya: Izbrannye trudy* [Logical and Philosophical Studies: Selected Works]. Moscow: Progress, 1986, pp. 449–482. (Trans. into Russian)