Эпистемология и философия науки
2021. Т. 58. № 1. С. 142–160
УДК 167.7

Epistemology & Philosophy of Science
2021, vol. 58, no. 1, pp. 142–160
DOI: 21

Бенацерраф и теоретико-множественный редукционистский реализм*

Ламберов Лев Дмитриевич – кандидат философских наук, доцент.
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина.
Российская Федерация, 620002, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51.
e-mail: lev.lamberov@urfu.ru

В статье анализируется аргументация П. Бенацеррафа против теоретико-множественного редукционистского реализма, представляющая фрагмент более широкого аргумента, получившего название «проблема отождествления». Помимо реконструкции и анализа аргумента приводятся возможные возражения, предложенные самим П. Бенацеррафом около 30 лет спустя. Анализируемый фрагмент аргументации касается возможности однозначного сведения математических понятий к теоретико-множественным понятиям. Анализ возможных возражений показывает их зависимость от ряда дополнительных предпосылок. В статье демонстрируется, что замечания П. Бенацеррафа к своей собственной аргументации против теоретико-множественного реализма либо имеют прагматический характер, либо существенно опираются на дополнительные аргументы, обосновываемые прагматически или требующие дополнительной аргументации. В отдельных случаях замечания П. Бенацеррафа сами по себе, либо же указанные дополнительные принципы вполне могут подвергаться сомнению. Соответственно, его сомнения в его же собственной аргументации против теоретико-множественного реализма представляются недостаточными, чтобы отвергнуть проблему отождествления и сохранить позицию теоретико-множественного реализма.

***Ключевые слова*:** Бенацерраф, реализм, теория множеств, теоретико-множественный реализм, прагматизм, существование

Benacerraf and set-theoretic reductionist realism

Lev D. Lamberov – PhD in Philosophy, Associate Professor.
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin.
51 Lenina av., Yekaterinburg, 620002, Russian Federation.
e-mail: lev.lamberov@urfu.ru

The paper is devoted to analysis of P. Benacerraf's argument against set-theoretic reductionist realism which is a fragment of a broader argument, know as the "identification problem". The analyzed fragment of P. Benacerraf's argument concerns the possibility of reducing of mathematical notions to set-theoretic notions. The paper presents a reconstruction of P. Benacerraf's original argumentation, its analysis and also several possible objections proposed by P. Benacerraf himself about 30 years later after the original publication. Namely, he claimed (1) that a set-theoretic definition of natural numbers in G. Frege's fashion can serve as a proper and unique set-theoretic definition, (2) that his argument doesn't undermine eliminative reductionsts' position, (3) that even if there are no argument possible in favor of some particular set-theoretic definition of natural numbers one may take set-theoretic realism for granted. An analysis of the mentioned possible objections shows their dependence on a number

* Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19–011–00301.

© Ламберов Л.Д.

of additional premises. The paper demonstrates that P. Benacerraf's objections on his own argument against set-theoretic realism either have a pragmatic character themselves or essentially rely on additional arguments that are justified pragmatically or require additional argumentation. For example, his possible objections require that set theory is considered as the only true foundational theory in mathematics, and that it has several important pragmatic virtues, like convenience of use to formalize other mathematical theories. In some cases, P. Benacerraf's objections on their own, or the indicated additional principles may well be called into question, which demonstrates the insufficiency of P. Benacerraf's objections against his original argument. Without the mentioned pragmatic arguments P. Benacerraf's objections become a kind of belief in mysticism. Accordingly, his doubts about his own argument against set-theoretical realism seem insufficient to reject the problem of identification and save the position of set-theoretical realism from collapse.

***Keywords*:** Benacerraf, realism, set theory, set-theoretic realism, pragmatism, existence

Статья посвящена рассмотрению *фрагмента* аргументации П. Бенацеррафа против математического реализма и анализу некоторых возможных возражений. В первой части статьи формулируется анализируемый фрагмент аргументации П. Бенацеррафа. В литературе эта аргументация обозначается как проблема неединственности представления математических объектов, проблема множественных редукций или проблема отождествления. Следует отметить, что внимание будет сосредоточено лишь на фрагменте этой аргументации, касающеймся опровержения теоретико-множественной разновидности редукционистского реализма (далее – ТМРР). Таким образом, в статье рассматривается вопрос о том, сводимы ли математические понятия к теоретико-множественным понятиям. В частности, это предполагает сведение натуральных чисел к множествам определенного вида. Изначальный аргумент П. Бенацеррафа показывает, что такое сведение не является единственным, что вступает в конфликт с реалистским подходом в математике и основаниях математики. Во второй части статьи приведен ряд потенциальных возражений по поводу анализируемого фрагмента аргументации, предложенных самим П. Бенацеррафом приблизительно через 30 лет после публикации его первоначальной статьи. Далее, анализируются эти возражения и показывается их зависимость от принимаемого подхода к основаниям математики. В статье показано, что контраргументы, предлагаемые самим П. Бенацеррафом, могут работать только при условии дополнительной (абдуктивной) аргументации, обосновывающей выбор теоретико-множественного подхода к основаниям математики.

I

Аргумент П. Бенацеррафа, предложенный им в статье 1965 г. [Benacerraf, 1965] и не совсем корректно названный им дилеммой, наряду с еще одной дилеммой П. Бенацеррафа, изложенной в статье 1973 г. [Benacerraf, 1973], является важным этапом развития философии математики. Эти аргумент и дилемма обсуждаются до сих пор и считаются одним из исходных пунктов *современного* структуралистского подхода, а также одними из наиболее серьезных доводов против математического реализма. В подтверждение значимости указанных статей П. Бенацеррафа достаточно процитировать, например, такого крупного философа математики как С. Шапиро: «Большая часть современной философии математики уходит корнями в статью Бенацеррафа 1973 года, [...] [а] в своей более ранней статье 1965 года Бенацерраф поднимает еще одну проблему для реализма в онтологии» [Shapiro, 1997, pp. 3–5].

Аргументация может быть разделена на два относительно независимых фрагмента. Первый фрагмент касается невозможности однозначного сведения математических объектов к множествам, что в том числе ставит под вопрос использование теории множеств в качестве единственно верных оснований математики. Второй же касается рассмотрения понятия тождества. Заключение всего аргумента может быть представлено как тезис о том, что числа *не могут быть* математическими объектами, а предметом изучения математики являются структуры (например, ω-последовательность). В настоящей статьей целиком аргумент П. Бенацеррафа не анализируется, внимание сосредоточено лишь на первом из обозначенных фрагментов, в котором предлагается критика ТМРР. Последний может быть определен как тезис о том, что любой математический объект *на самом деле* представляет собой *определенное* множество, сводится к *определенному* множеству. Предполагается, что теория множеств является *предельным основанием математики*, а каждый математический объект как строго определенное множество является объектом в реалистском смысле (т.е., существует независимо от познающих агентов).

Следует отметить близость ТМРР и математического платонизма, которая проявляется в реалистском понимании объектов математики. Знаки, используемые говорящими на квазиматематическом языке для счета (1, 2, 3 и т.д.) обозначают строго определенные объекты, представляющие собой в случае математического платонизма абстрактные сущности, а с точки зрения ТМРР – множества. Онтологический статус этих множеств в рамках ТМРР не проясняется. Множества могут пониматься как абстрактные объекты, и тогда эта позиция оказывается разновидностью математического платонизма, а могут пониматься каким-то другим образом (например, как мереологические структуры

физических объектов). То есть, ТМРР может представлять собой форму математического реализма[1]. Важной особенностью ТМРР, сближающей его с математическим платонизмом, является тезис о том, что математические объекты не «схлопываются» и не «множатся», если речь идет о каком-то конкретном математическом объекте, то этот объект строго один и он не совпадает с остальными математическими объектами. Каждый объект математики является *уникальным* объектом, в данном случае множеством в соответствии с теоретико-множественным подходом к основаниям математики, принимаемым по умолчанию.

Указанный первый фрагмент аргумента П. Бенацеррафа представляет собой довольно мелодраматичную историю двух мальчиков, Джонни и Эрни (это намёк на Джона фон Неймана и Эрнста Цермело). Их родители-логики решают (независимо) обучать своих детей «правильной» математике: сначала Эрни и Джонни изучают логику и теорию множеств, а затем числа и счёт. Обучение числам и счету предполагает, что *на самом деле* числа являются множествами, а «обычные» числа представляют собой лишь прагматически удобное средство, «синтаксический сахар». Все арифметические операции – вполне знакомые Эрни и Джонни теоретико-множественные операции, сводимые к отношению принадлежности элемента множеству. Когда их обучение заканчивается, родители позволяют им общаться с «обычными» людьми, и наконец эти два мальчика знакомятся друг с другом. Обычные люди представляются им довольно скучными, они не знают многого из того, чему родители обучили Эрни и Джонни, поэтому им интереснее проводить время вместе. Несмотря на то, что оба искренне верят в сводимость арифметики к теории множеств, они не могут договориться относительно некоторых вопросов, а «обычные» взрослые им совершенно не могут в этом помочь. Например, они никак не могут разрешить вопросы о том, является ли единица элементом тройки, одинакова ли кардинальность булеанов у всех чисел, чьи «теоремы» (в конце концов!) верны.

Эту историю лучше всего представить более формальным способом. Так, Э. Цермело предлагал определять 0 как пустое множество, а понятие следующего числа как синглетон, содержащий предыдущее число. Подход же Дж. Фон Неймана был иным, он определял 0 как пустое множество, а понятие следующего числа давал через объединение предыдущего числа и синглетона, содержащего предыдущее число. Эти определения можно сформулировать в следующем виде:

[1] В дальнейшем не рассматриваются маргинальные варианты ТМРР, например, в предложенной П. Мэдди натуралистической форме [Maddy, 1990, pp. 50–67].

Подход Э. Цермело:

$0 = \{\}$
$S(n) = \{\{n\}\}$

Подход Дж. фон Неймана:

$0 = \{\}$
$S(n) = n \cup \{n\}$

Таким образом, ряд натуральных чисел может быть для наглядности представлен в виде следующей таблицы:

Натуральное число	Нумерал Э. Цермело	Нумерал Дж. фон Неймана
0	{}	{}
1	{{}}	{{}}
2	{{{}}}	{{}, {{}}}
3	{{{{}}}}	{{}, {{}}, {{}, {{}}}}
и т.д.		

При принятии подхода Э. Цермело единица *не* является элементом тройки, а кардинальности булеанов любых «чисел» совпадают. Если же принять подход Дж. фон Неймана, то единица является элементом тройки, а кардинальность каждого «числа» равна кодируемому натуральному числу. Соответственно, кардинальность булеана любого данного «числа» будет различной. Если обратиться к более интересным утверждениям общего характера, то можно обнаружить, что при принятии подхода Дж. фон Неймана можно доказать, что $\forall x \forall y[x < y$ тогда и только тогда, когда $x \in y$ и $x \subset y]$, т.е. «для всяких двух чисел первое число меньше второго тогда и только тогда, когда первое число является элементом второго числа и является собственным подмножеством второго». В случае подхода Э. Цермело можно доказать теорему $\forall x \forall y[x \in y$ тогда и только тогда, когда y является следующим за x числом], т.е. «для всяких двух чисел первое число является элементом второго числа тогда и только тогда, когда второе число следует за первым числом». В разных подходах мы имеем разные определения отношения «быть меньше» (в случае Э. Цермело это отношение удобнее определить индуктивно, при походе Дж. фон Неймана оно определяется указанной теоремой).

Арифметические утверждения в разных подходах получают одинаковые истинностные значения. Однако в рамках ТМРР достаточно проблематично выделить какой-либо чёткий критерий отделения

арифметических утверждений от «побочных» теоретико-множественных (например, о принадлежности одного числа другому).

Рассматриваемые П. Бенацеррафом способы представления натуральных чисел как множеств не являются исчерпывающими. Например, Дж. Лукас [Lucas, 2000, pp. 110–112] рассматривает еще один способ представления натуральных чисел (случай мальчика Томми), в котором понятие следующего числа определяется как $\{\} \cup \{n\}$. Однако и эти три способа не исчерпывают всех возможностей. Дело в том, что аргументация П. Бенацеррафа *неявно* основывается на одном важном метаматематическом результате.

Рассмотрим модели первопорядковой формализованной арифметики Пеано, которая не является конечно аксиоматизируемой, поскольку содержит схему индукции. Интересной особенностью этой теории является ее некатегоричность. Дело в том, что первопорядковые теории, модели которых бесконечны, «не способны» контролировать свою кардинальность, что следует из теоремы Лёвенгейма-Скулема о повышении кардинальности. Раз множество натуральных чисел бесконечно, то бесконечна и модель формализованной арифметики. Это значит, что арифметика, формализованная с помощью первопорядкового языка, имеет бесконечное число моделей любой бесконечной кардинальности. Последнее иногда представляют как существование у первопорядковой арифметики нестандартных моделей. Важно в этом результате то, что эти модели *разные*, они не изоморфны, имеют различную структуру. То есть, (1) одна модель может быть названа моделью Цермело, она содержит множество нумералов Цермело, (2) вторая модель, соответственно, является моделью фон Неймана и содержит нумералы фон Неймана, (3) третья модель содержит нумералы, рассматриваемые Дж. Лукасом, (4) существует бесконечное число не изоморфных моделей, содержащих в качестве значений для выражений, обозначающих натуральные числа, какие-то множества.

Обращение к формализации арифметики с помощью второпорядкового языка не решает указанную проблему. Второпорядковые теории категоричны, их модели изоморфны, тем не менее эти модели все равно остаются *разными* в смысле разных объектов, и их тоже бесконечно много. Без дополнительных принципов (например, принимаемых при унивалентном подходе к основаниям математики) у нас отсутствуют основания для трактовки изоморфных объектов как равных. Имеется бесконечное число возможных представлений натуральных чисел как множеств. Последнее обстоятельство оказывается гибельным для ТМРР, так как ТМРР предполагает, что каждый математический объект является *уникальным* объектом.

Рассмотренная ситуация с несовместимыми подходами к представлению натуральных чисел и приведенные рассуждения по поводу моделей формализованной арифметики демонстрирует, что

однозначного представления натуральных чисел не существует. Не понятно, чем *на самом деле* является, например, число 2 – либо объектом {{{}}}, либо {{}, {{}}}, либо каким-то еще другим из бесконечного числа вариантов. Представляется, что сами по себе способы представления натуральных чисел недостаточны для того, чтобы определить, какой способ является *правильным*. Либо мы *не знаем*, чем на самом деле являются математические объекты в теоретико-множественном представлении, либо же мы имеем дело с множественностью объектов математики. То есть, число 2 не является каким-то конкретным объектом, а является и объектом {{{}}}, и объектом {{}, {{}}}, и огромным количеством других объектов. Последнее обстоятельство может быть обозначено в качестве проблемы неединственности представления математических объектов.

Соответственно, аргументацию П. Бенацеррафа против ТМРР можно представить в виде следующего довольно простого рассуждения:

Если ТМРР верен, то всякий математический объект представляет собой уникальное и строго определенное множество.

Не верно, что всякий математический объект представляет собой уникальное и строго определенное множество.

Следовательно, ТМРР не верен.

Первая посылка данного рассуждения следует из определения ТМРР, вторая посылка обеспечивается (в смысле ее философской интерпретации) рассмотренным выше метаматематическим результатом, касающимся моделей формализованной арифметики. Рассуждение соответствует схеме рассуждения от противного. Сторонник ТМРР может (1) критиковать логические принципы, обеспечивающие логическую корректность рассуждения, и/или (2) критиковать и пересматривать посылки аргумента. В дальнейшем будет рассмотрен второй вариант ответа теоретико-множественного реалиста на данное рассуждение.

В целях некоторого прояснения на второй посылке следует остановиться несколько подробнее, поскольку можно выделить две ее различных интерпретации, онтологическую и эпистемическую. Изначально П. Бенацеррафа интересовала исключительно онтологическая интерпретация, согласно которой числа *не могут быть* уникальными и строго определенными множествами. Тем не менее в дальнейшем (в статье 1996 г.), когда П. Бенацерраф формулирует потенциальные возражения (конкретно это второе возражение, обозначенное в настоящей статье как **II.2.1**), он обращает внимание на эпистемическую интерпретацию, по которой мы *не можем знать*, какими конкретными уникальными и строго определёнными множествами *являются* числа.

II

Спустя 31 год после публикации изначальной статьи, фрагмент аргументации которой был проанализирован в предыдущем параграфе, П. Бенацерраф [Benacerraf, 1996] сдержано оценил свои идеи и предложил к ним некоторые возражения. В настоящем параграфе рассматриваются те (возможные) возражения, предлагаемые П. Бенацеррафом, которые применимы к касающемуся ТМРР фрагменту его аргументации.

II.1.1. Первое замечание П. Бенацеррафа к своей собственной аргументации состоит в том, что хотя натуральные числа и не могут быть нумералами Цермело или нумералами фон Неймана, это еще не означает, что они не могут быть множествами какого-то одного определенного вида. Более того, П. Бенацерраф в качестве наиболее подходящего варианта представления натуральных чисел как множеств называет определение числа в духе логицизма и неологицизма[2], в частности по Г. Фреге [Frege, 1884] через классы эквивалентности (аналогичное определение предлагал Б. Рассел). Согласно Г. Фреге, число определяется как класс всех объемов понятий, содержащих данное число элементов. Например, под понятие «не быть тождественным самому себе» не подпадает ни один объект, что дает нам пустой класс, играющий роль нуля. Класс объемов всех понятий, содержащих только один элемент, представляет собой аналогичное теоретико-множественное определение единицы, этот класс содержит объемы понятий «звезда Солнечной системы», «естественный спутник Земли» и *всех* остальных аналогичных по объему понятий. Необходимо указать, что данное возражение предполагает дополнительную аргументацию в пользу теоретико-множественного подхода, анализ прагматического варианта которой будет предложен далее.

II.2.1. Во втором возражении П. Бенацерраф заявляет, что ни одному стороннику ТМРР «не следует принимать простое утверждение, что если не существует априорного доказательства, что некоторый вариант редукции [натуральных чисел к множествам] является верным, то и нет никакого “правильного” варианта редукции» [Benacerraf, 1996, p. 26]. Таким образом, П. Бенцерраф предполагает, что даже если реалист не может доказать правильность своей позиции, этот факт не должен поколебать его приверженность этой точке зрения. Вполне может оказаться так, что для некоторой истины (например, для позиции ТМРР) в принципе нельзя построить априорное доказательство или же какой-либо аргумент в пользу этой истины. Данное замечание обращает внимание на возможную эпистемическую интерпретацию второй посылки реконструированного ранее

[2] См.: [Parsons, 1965]. Также см.: [Wright, 1983; Boolos, 1987; Hale, 2001].

аргумента П. Бенацеррафа. Может показаться, что эпистемическая интерпретация второй посылки потенциально позволяет отвергнуть изначальный аргумент как ошибочный. Однако представляется, что ситуация со второй посылкой несколько тоньше, что будет обсуждаться в соответствующем разделе ниже.

II.3.1. Третье замечание П. Бенацеррафа заключается в указании на ограниченность оригинальной аргументации. Предполагается, что рассмотренный выше фрагмент аргумента «работает» только против редукционистов, которые, сводя натуральные числа к множествам, не отказываются от чисел самих по себе, но «не работает» против сторонников элиминативистского редукционизма в духе У. Куайна, для которых реально существующими объектами являются только те объекты, которые постулируются совокупностью наилучших научных теорий о мире в целом. Обращение к наилучшим научных теориям может поддерживаться дополнительной прагматической аргументацией в пользу теоретико-множественного подхода.

Это возражение П. Бенацеррафа предполагает, что именно теоретико-множественный подход к основаниям математики является верным (либо прагматически оправданным, т.е. *наилучшим* подходом к основаниям математики), а также, что имеется некоторая конкретная наилучшая теория множеств, в которой дается теоретико-множественное определение натуральных чисел. Необходимо оговориться, что сам П. Бенацерраф понимает, что такой элиминативистский редукционизм вовсе не претендует на правильное описание действительности, «превосходящее наилучшую научную теорию» [Benacerraf, 1996, p. 27]. Научные теории могут считаться наилучшими не только и не столько в соответствии с прагматическими критериями (например, полезностью, эффективностью представления некоторой предметной области, удобством и т.д.), но так же и в соответствии с некоторыми другими критериями (например, соответствия действительности или сравнительных логических свойств). Однако сомнительно, чтобы такие соображения могли бы играть какую-то существенную роль, когда дело касается достаточно продвинутых и весьма абстрактных разделов математики как теория множеств. Достаточно хорошо известно, что даже наиболее простые теоретико-множественные аксиомы значительно превосходят по содержанию человеческую эмпирическую интуицию[3]. Претензия на соответствие теории множеств действительности вряд ли может быть обоснованна с помощью ограниченных человеческих способностей. В лучшем случае это дает возможность в некотором смысле свести

[3] См. критику эмпирической интуиции относительно аксиом теории множеств в работах [Chihara, 1990, pp. 201–214; Lomas, 2002] и др., обзор см. в [Целищев, 2003, с. 70–71].

третье замечание П. Бенацеррафа к его второму (эпистемическому) замечанию.

Если же речь идет о признании какого-то варианта теории множеств и конкретного вариант представления натуральных чисел наилучшими за счет их сравнительных логических свойств, то для начала необходимо выделить такие желательные логические свойства и привести соответствующую аргументацию, обосновывающую выбор. Выбор желательных логических свойств некоторых формализмов может быть продиктован и обоснован скорее прагматическими соображениями, чем соображениями какого-то другого рода.

Как должно быть видно из предыдущего изложения, три возражения П. Бенацеррафа к своей же собственной аргументации против ТМРР в значительной степени опираются на дополнительные предпосылки, некоторые из них могут быть оправданы скорее прагматически. Они могут быть названы «прагматическими» в том смысле, что предполагают прагматические соображения в качестве аргументации. В дальнейшем будет предложен анализ этих дополнительных предпосылок. Для удобства читателя дальнейшее изложение по структуре аналогично изложению возражений П. Бенацеррафа, приведенных в предыдущем тексте.

II.1.2. Что касается определения чисел через классы эквивалентности в духе логицизма, то следует указать на общую проблематичность такого подхода. Необходимо обратить внимание на то, что числа представляются как объекты определенного вида. Например, единица представляет собой множество всех объемов понятий, под которые подпадает строго один какой-то объект. То есть, единица – это множество синглетонов. Тем не менее это множество само по себе тоже является объектом. Вполне обоснованно допустить, что этот объект является единственным объектом, подпадающим под некоторое понятие. Соответственно, единица как множество синглетонов должна включать в себя синглетон, содержащий само множество, представляющее единицу. Возможность порождения таких «монструозных» конструкций, содержащих сами себя, вовсе не ограничивается только единицей, то же самое справедливо для любого числа, понимаемого как теоретико-множественный объект в духе Г. Фреге.

Проблематичность описания такого рода объектов возникает в первую очередь в наиболее распространённых и полагаемых большинством математиков несомненными формализованных теориях множеств ZF и ZFC, поскольку в них запрещается существование слишком больших множеств, каковыми оказываются числа в духе Г. Фреге. Слишком большие множества запрещены с целью избежать парадоксов (множество всех ординалов приводит к парадоксу Бурали-Форти). В ZFC, например, для всякого множества x имеется такое множество y, что не существует сюръективного отображения из x в y.

То есть, некоторый класс не является множеством в том смысле, если он может быть сюръективно отображен в любое множество. В ZF/ZFC «размер» совокупности объектов является одним из критериев того, является эта совокупность множество или не является. Однако для собственных классов нет какого-либо однозначного критерия того, какой «размер» является, так сказать, «пограничным» (он не определяется набором аксиом). Если обратиться к альтернативным вариантам теории множеств, то следует заметить, что иногда удается избежать парадоксов другими способами. Например, в позитивных теориях множеств (в них принимается схема свертывания для позитивных формул), мотивированных топологией, совокупность множеств, содержащих самих себя, является множеством. Соответственно, теоретико-множественное определение чисел в духе Г. Фреге вполне может подходить при условии принятия такого варианта теории множеств.

Чтобы сделать проблему со слишком большими множествами еще более явной необходимо заметить, что затруднение состоит не только в том, что любое число содержит «копию» самого себя и всех остальных чисел (в том числе и больших него), но так же в том, что вполне мыслимым является понятие «множество всех ординалов». Поскольку смысл этого понятия предполагает, что под него подпадает лишь один объект, то объем этого понятия должен, согласно Г. Фреге, входить, в частности, в теоретико-множественное определение единицы. То есть, единица по Г. Фреге должна содержать множество всех ординалов. Однако в ZF/ZFC это невозможно, так как в них запрещены настолько большие множества. Соответственно, этот подход без каких-то специальных модификаций не подходит для большинства математиков, придерживающихся точки зрения, что ZFC представляет собой основания математики. Однако для подобных ситуаций может быть применена лемма схлопывания А. Мостовского[4], согласно которой любой отдельно взятый класс эквивалентности имеет каноническую репрезентацию. То есть, в ZF/ZFC имеется возможность определить числа как классы эквивалентности, но это требует построения дополнительного аргумента. Более того, репрезентации не будут являются классами эквивалентности в строгом смысле слова, а будут представлять собой конструкции в духе подхода фон Неймана.

Представляется, что аргументация П. Бенацеррафа не опровергает возможность определения чисел как классов эквивалентности, а лишь проблематизирует конкретные определения. То есть, она показывает, что требуется дополнительный аргумент, позволяющий среди различных возможных теоретико-множественных представлений выделить одно *правильное* представление.

[4] Теорема 3 в [Mostowski, 1949].

Тем не менее даже если и удастся каким-то образом определить числа как классы эквивалентности, остается другое затруднение, касающееся отношения порядка. Как известно, логицистский проект сведения математики к чистой логике оказался неудачным. В двухтомнике «Основные законы арифметики» Г. Фреге использовал принцип, получивший название Основного закона V и представляющий собой аксиому неограниченного свертывания. Эта аксиома утверждает существование множества, чьи элементы являются в точности теми элементами, которые подпадают под некоторое понятие. Парадокс Рассела в системе Г. Фреге возникает как раз из-за Основого закона V (достаточно рассмотреть понятие «множество, содержащее себя в качестве своего элемента»). Обращение к Основному закону V потребовалось Г. Фреге для выведения Принципа Юма, по которому число элементов *F* равно числу элементов *G* тогда и только тогда, когда имеется биекция из *F* в *G*. По мнению Г. Фреге Принцип Юма сам по себе не позволяет отличить числа от того, что числами не является. Он отмечает[5], что Принцип Юма не позволяет ответить на вопрос о том, является ли Юлий Цезарь тем же объектом, что и число ноль. В дальнейшем К. Райт [Wright, 1983] предпринял реконструкцию логицистской программы Г. Фреге и предложил отказаться от использования Основного закона V с заменой его Принципом Юма, что позволяет иметь непротиворечивую систему, в которой выводятся искомые фундаментальные аксиомы и теоремы арифметики. Однако позже было показано[6], что Принцип Юма не является аналитическим (т.е., чистым логическим принципом), что ставит под сомнение реализуемость логицистской программы.

Обратимся к еще одному аспекту определения чисел как классов эквивалентности. Такой подход к числам дает представление чисел как кардиналов (через равномощность), однако кардиналы сами по себе не упорядочены. Каждый такой кардинал оказывается абсолютно обособленным относительно остальных кардиналов. В рамках обычной арифметики натуральные числа характеризуют не только количество, но и образуют строго определенного вида последовательность, в которой «сущность» каждого отдельного числа зависит от его положения в этой последовательности. Полное определение числа в рамках логицизма и неологицизма невозможно получить обычными внутритеоретическим средствами, поскольку упорядоченность для таких чисел должна предполагать, что числа уже имеются на метатеоретическом уровне и используются для организации кардиналов в соответствии с «естественным» порядком. То есть, логицисту

[5] См. [Frege, 1884, S. 67–68]. Комментарий по поводу проблемы Юлия Цезаря см. в [Heck, 1997].

[6] Аналитической не является одна из импликаций Принципа Юма – если число элементов *F* равно числу элементов *G*, то имеется биекция из *F* в *G* [Boolos, 1997].

требуется *заранее* иметь числа в метаязыке и уметь использовать их для счета. Значит, некоторые математические понятия остаются несводимыми к чистой логике, в связи с чем логицистский проект не может быть реализован до конца.

Следовательно, первый контраргумент П. Бенацеррафа «повисает в воздухе», он не является опровержением аргумента против ТМРР.

II.2.2. Второй контраргумент П. Бенацеррафа представляется скорее неоднозначным и предполагает несколько различных трактовок. В нем допускается ситуация, когда возможность сформулировать дополнительный аргумент в пользу того или иного теоретико-множественного варианта представления чисел отсутствует. Тем не менее, по мнению П. Бенацеррафа, это не является проблемой для сторонника ТМРР. Этот контраргумент совпадает с указанной ранее эпистемической интерпретацией второй посылки изначального аргумента, которая, как может показаться, делает этот аргумент ошибочным.

Такое понимание аргумента в контексте одной из проблем математического платонизма, рассматриваемой П. Бенацеррафом [Benacerraf, 1972], позволяет обратиться к уточнению природы объектов, предполагаемых ТМРР. Указанная проблема имеет форму дилеммы, согласно которой, мы можем иметь либо объяснение математической истины в духе семантики А. Тарского, либо объяснение математического знания в духе каузальной теории знания или релайабилизма[7]. Сторонник математического платонизма понимает математические объекты как абстракции, не вступающие в причинно-следственные отношения с физическими вещами. Закономерно задаться вопросом о статусе множеств как математических объектов, предполагаемых ТМРР. Если множества являются платонистскими абстракциями, то к ТМРР применяется дилемма П. Бенацеррафа, а сторонник этого подхода не может одновременно адекватно объяснить и математическую истину, и математическое знание. Однако в этом случае мы уже не можем говорить, как в своей поздней контраргументации делает П. Бенацерраф, что это не является проблемой для ТМРР, поскольку дилемма указывает на принципиальную неполноту ТМРР.

Несколько иначе обстоит дело, если множества как математические объекты, предполагаемые ТМРР, не являются платонистскими абстракциями и доступны познанию. В этом случае сторонник ТМРР должен объяснить, по какой причине у нас отсутствует аргумент в пользу правильного сведения натуральных чисел к множествам. Если множества являются познаваемыми, то почему относительно них мы не можем знать то, какие конкретные множества представляют собой какие конкретные натуральные числа.

[7] Независимость дилеммы П. Бенацеррафа от каузальной теории знания и обращение к релайабилизму предложено Х. Филдом [Field, 1989].

Другая и наиболее проблематичная сама по себе трактовка этого контраргумента П. Бенацеррафа может предполагать, что ТМРР является скорее разновидностью «слепой» веры. Вряд ли *безусловная* вера в правильность ТМРР без какой-либо возможности обоснования не может представлять собой что-либо лучшее, чем вера в существование приведений. Следует согласиться с П. Бенацеррафом, что теоретико-множественный реалист может принять эту точку зрения, однако не следует считать ситуацию патовой. В конце концов эта позиция не будет иметь ничего общего с рационалистическим (читай: научным) подходом за исключением ситуации, когда в пользу ТМРР будут говорить какие-то дополнительные аргументы, полагающиеся нами более оправданными, чем, например, аргументы в пользу существования привидений. В целом разработка философии и оснований математики представляют собой рациональное предприятие, а иррациональная вера в ТМРР оказывается совершенно бесполезной.

Оправданием такой веры может выступить, например, стремление к единообразному описанию или аргументация прагматического толка, настаивающая на полезности. Эта позиция может «выводится» из наилучшей научной теории в духе У. Куайна. То есть, она будет поддерживаться некоторой разновидностью аргумента о неустранимости математики[8], согласно которой математические объекты как множества будут предполагаться нашими научными теориями. Однако следует отметить, что если с неустранимостью некоторых математических теорий (например, арифметики или даже топологии) из естественнонаучных теорий ещё можно согласиться, то неустранимость чисто философской концепции вызывает весьма серьёзные сомнения. Аргументы о неустранимости предполагают применение теоретического знания на практике, а применение на практике концепции ТМРР довольно трудно себе представить. Кроме того, при обосновании такого рода возникают и другие затруднения, обсуждаемые далее при рассмотрении третьего возражения.

II.3.2. Перед рассмотрением третьего возражения необходимо дополнительно прояснить различие между редукционизмом и элиминативным редукционизмом, а также то, какую роль оно играет в аргументации П. Бенацеррафа. По мнению П. Бенацеррафа, его аргументация «работает» только против сторонников редукционизма, но «не работает» против сторонников элиминативного редукционизма. Различие между этими позициями состоит в том, что редукционист не отказывает числам в (независимом) существовании после их сведения к теоретико-множественным конструкциям, элиминативный же редукционист предполагает, что эти теоретико-множественные конструкции и являются числами. Для последнего чисел самих по себе

[8] Подробнее о такой аргументации см. в [Colyvan, 2001].

более не существует, существуют лишь множества определенного вида. В этой связи позиция ТМРР может быть уточнена. Первый вариант ТМРР может быть последовательным лишь в случае ослабления собственно теоретико-множественной составляющей рассматриваемой позиции. То есть, сторонник неэлиминативного редукционизма предполагает не только реальное существование теоретико-множественных конструкций, к которым сводятся числа, но и чисел самих по себе. Эта позиция ослабляет тезис о том, что числа являются теоретико-множественными конструкциями, поскольку признаётся *реальное* существование и чисел, и соответствующих им множеств. Второй же вариант ТМРР выстраивается в духе концепции У. Куайна об экспликации как элиминации. С этой точки зрения раз числа могут быть сведены к теоретико-множественными конструкциям, то числа сами по себе реально не существуют, они заменяются на множества. Последнее предполагает дополнительное условие, что именно предполагаемый вариант теории множеств и предполагаемый способ представления чисел с помощью множеств являются наилучшими.

Антиэлиминативистский вариант ТМРР оказывается слабой позицией в контексте аргументации П. Бенацеррафа. Эта позиция отказывается от одного из ключевых тезисов ТМРР, а именно от тезиса о том, что числа *являются* множествами определенного вида. Такое ослабление не позволяет спасти данную позицию от изначальных возражений П. Бенацеррафа. Так как признаётся существование и чисел, и соответствующих им множеств, а также отсутствует дополнительный аргумент о том, что сведение чисел к множествам именно определенного вида является правильным (а такая «прямая» аргументация дана быть не может в силу рассмотренных ранее затруднений с некатегоричностью), то эта позиция оказывается проблематичной, и следует признать, что изначальная аргументация П. Бенацеррафа действительно «работает» против нее.

Если же обратиться к элиминативистскому варианту ТМРР, то необходимо отметить, что эта позиция оказывается довольно сильной, однако она зависит от некоторых соображений, требующих дополнительного обоснования. Эта позиция опирается на идеал наилучшей научной теории. Остается непонятным, почему эта наилучшая научная теория фиксируется именно в текущий момент времени. То есть, эта наилучшая научная теория не является идеалом научного исследования в духе Ч. Пирса. Даже если в настоящий момент большинство математиков признают теорию множеств (в виде ZF/ZFC) наилучшей теорией для оснований математики, она еще не является идеальной[9] теорией, решающей все возможные проблемы.

[9] Ср. сопоставление теории множеств с теорией типов в контексте оснований математики в [Ламберов, 2017].

Даже если допустить, что какой-то вариант теории множеств и является наилучшим, это еще не означает, что какой-то конкретный вариант теоретико-множественной редукции чисел так же является наилучшим. В конце концов если взять какой-то конкретный вариант теории множеств, например, ZF или ZFC, то с ней оказывается совместимо бесконечное количество разных вариантов представления чисел. Почему же тогда следует выбрать в качестве правильного какой-то один из них?

Следует пояснить, что на последний вопрос имеется ряд ответов, обосновывающихся прагматическим образом или образом, близким к прагматическому. В частности, такой ответ предлагает Э. Штайнхарт[10]. Он указывает, что последовательность нумералов фон Неймана (1) является рекурсивно определимой; (2) удовлетворяет определенным условиям упорядочения; (3) единообразно расширяется до трансфинитных чисел; (4) является минимальным ω-рядом; (5) ее n-ный элемент является множеством всех m, меньших n. Вполне можно понять, насколько эти свойства являются желаемыми для теоретико-множественной арифметики, а если методология исследования предполагает идеал простоты научной теории, то подход фон Неймана, безусловно, является наилучшим. Однако эти соображения не дают ответа на вопрос о релевантности этих свойств для *обычной* арифметики. В конце концов в обычной арифметике нет привносимых теорией множеств конструкций, типа булеана какого-то числа и т.д.

Аргументация против ТМРР касается проблемы сведения чисел к множествам, а не сравнения преимуществ различных подходов к представлению чисел, поэтому некоторые свойства подхода фон Неймана кажутся совершенно нерелевантными. Это касается того, как подход фон Неймана решает проблему вполне-упорядочения, представляющую собой известное затруднение для подхода Цермело. Однако при обращении к концепции наиболее общей наилучшей научной теории следует признать преимущества подхода фон Неймана. Правда, это вовсе не предполагает, что изначальная аргументация П. Бенацеррафа перестает «работать», так как для начала требуется обосновать, что именно теория множеств является такой наиболее общей наилучшей научной теорией.

Подходы Цермело и фон Неймана (и подобные им) позволяют преодолеть указанное выше затруднение, возникающее при определении чисел через классы эквивалентности в духе Г. Фреге. В концепции Г. Фреге не предполагается выделение какого-либо приоритетного базового множества, каждый теоретико-множественный нумерал формируется из объемов понятий: ноль отождествляется

[10] См. [Steinhart, 2002, pp. 345–346]. Также на прагматические преимущества подхода фон Неймана указывает П. Мэдди [Maddy, 1990, p. 84].

с пустым множеством (объемом понятия «быть нетождественным самому себе»), единица с классом синглетонов, двойка с классом пар и т.д. Нумералы задаются в некотором смысле «естественным» образом через объемы понятий, а не путем выделения базового множества, которое в дальнейшем используется для построения всех нумералов. Отождествление чисел с нумералами, построенными из базового множества, имеет свои преимущества, однако вызывает и ряд закономерных вопросов. Не совсем ясно, почему единицей должно быть именно множество, содержащее пустое множество, а двойкой – (как в подходе фон Неймана) множество, содержащее пустое множество и синглетон, содержащий пустое множество. Вопрос в том, почему пустое множество в указанных походах играет такую важную роль, несмотря на то, что в них происходит преодоление подхода Г. Фреге. В этой связи более последовательной представляется позиция Г. Кантора[11], в которой предлагается определять кардинальные числа (а к ним можно свести натуральные числа) с помощью специального понятия «единицы». Это понятие «единицы» представляет собой абстрактный урэлемент, не обладающий никакими свойствами (предполагается, что это *любой объект*, но лишенных всех свойств; видимо, что эти идеи представляю собой «кантианское наследие»). Из «единиц» в дальнейшем конструируются числа по достаточно простому принципу: единица – это множество из одной абстрактной «единицы», двойка – множество из двух «единиц» и т.д. Правда, использование такой привилегированной абстрактной «единицы» требует отдельного прояснения.

Таким образом, замечания П. Бенацеррафа к своей собственной аргументации против ТМРР существенно зависят от дополнительной аргументации, в некоторых случаях из области оснований математики (например, требуется достаточно сильное понятие тождества, как при унивалентном подходе). В отдельных случаях замечания П. Бенацеррафа сами по себе, либо указанные дополнительные принципы вполне могут подвергаться сомнению. Соответственно, его сомнения в его же собственной аргументации против ТМРР представляются недостаточными, чтобы отвергнуть представленную проблему отождествления. Последнее может использоваться в качестве аргумента против теоретико-множественного подхода к основаниям математики.

[11] См. [Cantor, 1895], также см. [Fine, 1998].

Список литературы

Ламберов, 2017 – *Ламберов Л.Д.* Основания математики: теория множеств vs. теория типов // Философия науки. 2017. № 1. С. 41–60.

Целищев, 2003 – *Целищев В.В.* Онтология математики: объекты и структуры. Новосибирск: Нонпарель, 2003. 240 с.

References

Benacerraf, 1965 – Benacerraf, P. “What Numbers Could Not Be”, *Philosophical Review*, 1965, vol. 74, no. 1, pp. 47–73.

Benacerraf, 1972 – Benacerraf, P. “Mathematical Truth”, *The Journal of Philosophy*, 1973, vol. 70, no. 19, pp. 661–679.

Benacerraf, 1996 – Benacerraf, P. “What Mathematical Truth Could Not Be – I”, in: *Benacerraf and His Critics*. Oxford: Blackwell, 1996, pp. 9–59.

Boolos, 1987 – Boolos, G. “The Consistency of Frege’s Foundations of Arithmetic”, in: *On Being and Saying: Essays in Honor of Richard Cartwright*. Cambridge, MA: MIT Press, 1987, pp. 3–20.

Boolos, 1997 – Boolos, G. “Is Hume’s Principle Analytic?”, *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*. Oxford: Oxford University Press, 1997, pp. 245–262.

Cantor, 1895 – Cantor, G. “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre”, *Mathematische Annalen*, 1895, Bd. 46, N. 4. S. 481–512.

Chihara, 1990 – Chihara, C. *Constructability and Mathematical Existence*. Oxford: Clarendon Press, 1990, 300 pp.

Colyvan, 2001 – Colyvan, M. *The Indispensability of Mathematics*. New York: Oxford University Press, 2001, 186 pp.

Field, 1989 – Field, H. *Realism, Mathematics and Modality*. New York: Basil Blackwell, 1989, 290 pp.

Fine, 1998 – Fine, K. “Cantorian Abstraction: A Reconstruction and Defense”, *The Journal of Philosophy*, 1998, vol. 95, no. 12, pp. 599–634.

Frege, 1884 – Frege, G. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Verlage Wilhelm Koebner, 1884. S. 119.

Hale, 2001 – Hale,B. & Wright, C. *The Reason’s Proper Study: Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 2001, 470 pp.

Heck, 1997 – Heck, R. “The Julius Caesar Objection”, in: *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*. Oxford: Oxford University Press, 1997, pp. 273–308.

Lamberov, 2017 – Lamberov, L.D. “Osnovaniya matematiki: teoriya mnozhestv vs. teoriya tipov” [Foundations of Mathematics: Set Theory vs. Type Theory], *Filosofiya nauki – Philosophy of Science*, 2017, no. 1, pp. 41–60. (In Russian)

Lucas, 2000 – Lucas, J.R. *The Conceptual Roots of Mathematics*. London: Routledge, 2000, 470 pp.

Maddy, 1990 – Maddy, P. *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1990, 220 pp.

Mostowski, 1949 – Mostowski, A. “An Undecidable Arithmetical Statement”, *Fundamenta Mathematicae*, 1949, vol. 36, no. 1, pp. 143–164.

Parsons, 1965 – Parsons, C. “Frege’s Theory of Number”, in: *Philosophy in America*. New York: Cornell University Press, 1965, pp. 180–203.

Shapiro, 1997 – Shapiro, S. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology.* N.Y.: Oxford University Press, 1997, 296 pp.

Steinhart, 2002 – Steinhart, E. “Why Numbers Are Sets”, *Synthese*, 2002, vol. 103, no. 3, pp. 343–361.

Tselishchev, 2003 – Tselishchev, V.V. *Ontologiya matematiki: ob’jekty i struktury* [Ontology of Mathematics: Objects and Structures]. Novosibirsk: Nonparel’, 2003, 240 pp. (In Russian)

Wrigth, 1983 – Wright, C. *Frege’s Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press, 1983, 193 pp.