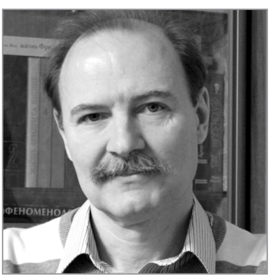
Эпистемология и философия науки
2018. Т. 55. № 4. С. 160–173
УДК 167.7

Epistemology & Philosophy of Science
2018, vol. 55, no. 4, pp. 160–173
DOI: 10.5840/eps201855474

Распределенное познание и математическая практика в цифровом обществе: от формализации доказательств к пересмотру оснований*

Шапошников Владислав Алексеевич – кандидат философских наук, доцент.
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.
Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4;
e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru



В статье сделана попытка посмотреть на современную математическую практику через призму концепции распределенного познания. Характерное для цифрового общества повсеместное использование персональных компьютеров и сети Интернет рассмотрено как способ достичь более эффективного распределения познавательной активности человека. В качестве решающего вызова, определяющего магистральное направление трансформации математической практики, в статье выделяется «проблема сложности». Современная тенденция к полной формализации математических доказательств на основе цифровых технологий рассматривается как одна из реакций на указанный вызов. Показано, что названная тенденция ведет к проекту переосмысления и перестройки самих оснований математики в целях обеспечения более эффективной коммуникации, а тем самым и надежности современной математики.

Ключевые слова: распределенное познание, коммуникация, цифровое общество, математическая практика, формальное доказательство, основания математики

Distributed cognition and mathematical practice in the digital society: from formalized proofs to revisited foundations

Vladislav A. Shaposhnikov – PhD in Philosophy, associate professor.
Lomonosov Moscow State University.
27/4 Lomonosovsky Av., Moscow, GSP-1, 119991, Russian Federation;
e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru

This paper attempts to look at the contemporary mathematical practice through the lenses of the distributed cognition approach. The ubiquitous use of personal computers and the internet as a key attribute of the digital society is interpreted here as a means to achieve a more effective distribution of the human cognitive activity. The major challenge that determines the transformation of mathematical practice is identified as 'the problem of complexity'. The computer-assisted complete formalization of mathematical proofs as a current tendency is viewed as one of the strands along which the mathematical community responds to the challenge. It is shown that this tendency gives live to the project

* Статья подготовлена при поддержке РФФИ, проект № 17–03–00257, «Онтология и эпистемология в компьютерной культуре (Ontology and epistemology in the computer culture)». Отправной точкой для написания настоящей статьи послужил доклад [Shaposhnikov, 2018].

calling to revisit and rebuild the very foundations of mathematics to secure more effective communication and thus guarantee the reliability of contemporary mathematics.

Keywords: distributed cognition, communication, digital society, mathematical practice, formal proof, foundations of mathematics

Имеет место занятный контраст между редкостной консервативностью профессиональной философии математики и достаточной гибкостью и открытостью новым веяниям повседневной практики самих математиков. В результате наблюдается явное запаздывание, а порой и прямое нежелание замечать происходящие на наших глазах изменения в математической практике со стороны философов математики[1]. Сказанное относится также и к новым тенденциям в философии науки и эпистемологии.

Так, в философии математики, равно как и в сознании общества, по-прежнему доминирует образ *картезианского математика-одиночки* [Tymoczko, 1986], который вносит свой единоличный вклад в кумулятивное развитие системы математического знания. Такой математик достигает полного и окончательного понимания строго дедуктивной структуры созданной до него математики в ходе многолетнего труда по ее освоению, после чего получает возможность внести собственную «лепту» в величественное здание математики в виде точно сформулированных и строго и окончательно доказанных новых теорем, которые отныне и до скончания веков будут носить его имя. Подобный взгляд, который еще Имре Лакатош критиковал под названием «евклидианизм» [Lakatos, 1978, p. 10], по авторитетному свидетельству Алана Бейкера, остается «философски установленным общепринятым взглядом на основу методологии математики» [Baker, 2015].

Картезианский математик никогда не существовал в реальности, хотя сам миф о нем имеет вполне отчетливые исторические корни, локализацию и смысл. Однако в этой статье мне хотелось бы обратить внимание на другое: на то, насколько сильно ситуация в *чистой математике*, которая сложилась благодаря цифровой революции и нашему вступлению в цифровое общество, находится в *кричащем противоречии* с этим по-прежнему популярным философско-математическим мифом.

Известный специалист по социальным аспектам компьютерных технологий и популяризатор цифровой культуры Говард Рейнгольд в одной из своих недавних книг весьма выразительно и точно назвал

[1] В настоящее время указанная ситуация выражается в неоднозначных отношениях между классически понимаемой философией математики и тем направлением исследований, которое получило название «философия математической практики (the philosophy of mathematical practice)».

главу, посвященную новому способу существования знания и творческой деятельности: “Social-Digital Know-How: The Arts and Sciences of Collective Intelligence” [Rheingold, 2012, p. 147]. Этот новый способ обозначен им как «социоцифровое ноу-хау» не случайно. Речь идет об инновациях на основе «массового сотрудничества», возможность которого была изначально встроена в принцип Всемирной паутины. Сюда следует добавить также «социальные нормы доверия, совместного использования и взаимовыгодного обмена», которые позволяют людям совместно решать такие задачи, которые были в принципе недоступным им в одиночку. При этом такое массовое сотрудничество возможно лишь благодаря постоянному использованию соответствующих «социоцифровых технологий», реализуемых на основе персональных компьютеров со стабильным интернет-соединением. Возникающие в результате «виртуальные сообщества» осуществляют своего рода «коллективный разум». Люди, утверждает Рейнгольд, в наивысшей степени, по сравнению с другими живыми существами, наделены способностью к совместной деятельности (“*Humans are supercooperators*”) [ibid., p. 149]. Именно на взаимодействие людей, опосредованное цифровыми технологиями, и указывает использование прилагательного “social-digital”. Характеристика же нового типа познавательной и творческой деятельности как “know-how” подчеркивает скорее «процедурный», чем «декларативный» ее характер и имеет, так сказать, антиплатонистский привкус.

Концепция распределенного познания

Нетрудно заметить, что “social-digital know-how”, о котором говорит Рейнгольд, представляет собой характерный пример того, что в когнитивной науке получило название *распределенного познания* (distributed cognition or DCog). Когнитивный антрополог Эдвин Хатчинс (University of California, San Diego), разрабатывавший с коллегами этот подход со второй половины 1980-х гг., использовал метафору “cognition in the wild”, чтобы указать на необходимость исследовать человеческое познание, как оно осуществляется в «естественной среде обитания» [Hutchins, 1995, p. xiii–xiv]. Такой подход неизбежно приводит к необходимости расширить границы основной единицы когнитивного анализа, перейдя от отдельного индивида к рассмотрению взаимодействующей социальной группы с обязательным учетом материальных условий их взаимодействия, к «когнитивной экологии». Коллега Хатчинса психолог Дон Норман разъясняет основную идею обсуждаемого подхода следующим образом: в своей мыслительной деятельности человек активно использует как других людей, так и общее для них физическое окружение, поскольку подобное «распределение интеллекта» позволяет ему эффективнее принимать решения и действовать, освобождая от существенной части бремени по запоминанию и вычислению [Norman, 1993, p. 146–147].

Можно сформулировать основной тезис концепции распределенного познания еще сильнее: процесс познания осуществляется системой, включающей, наряду с людьми, и используемые ими *инструменты*. Причем эти инструменты оказываются полноправными участниками познавательной деятельности («акторами» в смысле акторно-сетевой теории), принимающими на себя существенную часть работы в сложном процессе распределения труда. Особое внимание при этом уделяется не только знаниям и навыкам отдельных акторов (как человеческих, так и не человеческих), но и способу их организации в единую систему. Процесс познания предстает тогда как порождение и трансформация *социального контекста* в неразрывной связи с организацией и реорганизацией *физических и когнитивных артефактов*. Центральную роль при этом играет *координирование* различных (в первую очередь внешних и лишь затем внутренних, интернализированных) *представлений* [Perry, 2013].

Хатчинс апробировал концепцию распределенного познания на материале практики навигации на военных кораблях (US Navy) и когнитивной деятельности, как она осуществляется в кабине коммерческого авиалайнера. Именно эти полевые исследования легли в основу его книги “Cognition in the Wild” [Hutchins, 1995]. Вполне предсказуемо подход Хатчинса вызвал интерес такого известного сторонника «симметричной антропологии» и разработчика акторно-сетевой теории, как Бруно Латур. Последний посвятил книге Хатчинса подробную восторженную рецензию [Latour, 1996]. Главный изъян книги Хатчинса Латур видит в недостаточной последовательности и радикальности автора при формулировке своей позиции, с которой он в главном солидарен, а также в том, что из виду оказались упущены связи концепции распределенного познания с близкими ей по духу и параллельными разработками в сфере исследований науки и технологии (STS).

> Точно так же, как мышление есть свойство навигационной группы, работающей на борту корабля, причем так, что ни один моряк не может осмысленно сказать: «Это я произвожу расчет», совершение важнейших открытий, согласно новой истории науки, есть свойство целостных субкультур науки и принадлежащих к ним артефактов, так что нет смысла какому-либо отдельному ученому восклицать “cogito [я мыслю]!” или «эврика [я нашел]!» Мыслят – лаборатории, совершают открытия – сообщества, прогрессируют – дисциплины, видят – инструменты, не индивидуальные сознания [ibid., p. 61].

Для избранного мною в данной статье угла зрения замечания Латура особенно ценны, поскольку они напрямую переносят предложенный Хатчинсом подход в область исследовательской деятельности ученых. Я постараюсь выяснить, насколько этот подход релевантен для практики современных чистых математиков.

Математическая практика перед лицом «проблемы сложности»

Один из важнейших вызовов, с которым сталкивается современный математик, – это *количество и сложность доступной ему профессиональной информации*. Британский математик Брайан Дэвис обозначил его как «проблему сложности (the problem of complexity)» и писал о ряде «кризисов сложности (crises of complexity)», два из которых уже настигли чистую математику, начиная с 1970 г., другие – еще ждут ее впереди [Davies, 2005]. Главная трудность тем самым связана не с бедностью, а с богатством!

Во-первых, речь идет об огромном *количестве* и *разнообразии* научных результатов, которые требуют учета и освоения. Наиболее представительные современные специализированные *математические базы данных* (Math Databases) – это европейская база zbMATH (https://zbmath.org/) и американская база MathSciNet (https://mathscinet.ams.org/mathscinet/index.html). Первая из них содержит около 4 млн, вторая – более 3,5 млн единиц хранения. Ежегодно первая прибавляет более 120 тыс., а вторая – более 100 тыс. единиц. Эти цифры дают некоторое представление о числе работ, образующих «сокровищницу» современной математики, и о *скорости ее пополнения*. Их содержимое составляют опубликованные стандартным способом работы, большая часть которых не находится в свободном доступе. Однако современные математики имеют возможность *почти мгновенно* обмениваться новыми результатами, минуя сложный публикационный процесс и ограничения, связанные с копирайтом, благодаря различным репозиториям, например arXiv.org e-Print archive. Первоначально созданный физиками, он в настоящее время вполне освоен и математиками. На текущий момент (03.06.2018) этот самый крупный и известный репозиторий содержит около 1 млн 400 тыс. e-prints. В 2017 г. arXiv.org прибавлял более 10 тыс. единиц хранения ежемесячно, причем статьи по математике и математической физике составляют почти 26 % новых поступлений (https://arxiv.org/help/stats/2017_by_area/index). Все это – в свободном доступе!

Во-вторых, целый ряд современных математических результатов имеет *очень длинные и сложные обоснования*. Классическими примерами могут служить вполне традиционно полученные результаты, такие как доказательство великой теоремы Ферма или классификация конечных простых групп. Если освоение первого из названных доказательств математиком, не специализирующимся в соответствующей области, требует просто очень большого времени, то полноценное освоение и проверка второго доказательства математиком-одиночкой уже практически невозможна. Соответствующая трудность известна как проблема «необозримости (unsurveyability)» математических результатов. Еще в большей степени эта проблема относится к доказательству теорем с использованием компьютера (computer-assisted proofs). Уже знаменитое решение подобным способом проблемы четырех красок К. Аппелем и В. Хакеном с сотрудниками в 1976 г. вызвало многочисленные споры[2]. Из недавних примеров такого рода можно указать на «опубликованное» на arXiv.org в 2016 г. (https://arxiv.org/abs/1605.00723) решение с помощью компьютера *булевой проблемы пифагоровых троек*. Событие это было удостоено даже заметки в журнале Nature [Lamb, 2016]. Пифагоровой называется тройка натуральных чисел, удовлетворяющая соотношению $a^2+b^2=c^2$, а проблема формулируется так: можно ли разделить множество натуральных чисел на две части таким образом, чтобы каждая часть не имела ни одной пифагоровой тройки? Несмотря на использование некоторых упрощающих теоретических соображений, грандиозный компьютерный перебор (с использованием суперкомпьютера), «вес» которого составил почти 200 терабайт (!), показал, что для множества натуральных чисел от 1 до 7824 проблема имеет положительное решение, но если вместо 7824 взять 7825, то решения уже не существует. Вопрос о том, возможно ли получить для этого результата «математическое» (в привычном смысле), т. е. доступное для прочтения и понимания человеком (human-readable), доказательство, остается открытым.

Приглядываясь к сложившейся ситуации, начинаешь понимать: наука, чтобы быть действительно «открытой», нуждается не только в свободе доступа, использования, модификации и распространения материалов (https://opendefinition.org/). Только эффективное решение «проблемы сложности», способное обеспечить полноценное овладение огромным массивом результатов через выход на новый уровень коммуникации и сотрудничества на основе уверенного использования социоцифровых технологий, позволит говорить о подлинном появлении открытой науки, сделав ее «открытость» из номинальной – реальной.

[2] Именно истории, связанные с проблемой четырех красок и классификацией конечных простых групп, дали Б. Дэвису повод говорить о двух постгёделевских «кризисах сложности».

Именно об этом пишет молодой немецкий чистый математик Феликс Бройер (Felix Breuer)[3], развивая концепцию *открытой математики* (open mathematics), предполагающую: (1) *представление математики не как набора прозаических текстов* (mathematics as prose)*, а как массива данных* (mathematics as data), т. е. приведение имеющихся в нашем распоряжении математических сокровищ в удобный для автоматической обработки, анализа, переформатирования и многократного использования вид; (2) как массива данных, *созданного для людей* (mathematics for people), а значит, учитывающего в своей организации запросы разнообразных групп потенциальных пользователей.

Проект тотальной формализации математики

Реакция математического сообщества на «проблему сложности» движется по нескольким направлениям, одно из которых связано с разработкой интерактивных компьютерных «пруверов» (proof assistants), получением полностью формализованных и автоматически проверенных доказательств для как можно большего числа математических результатов и созданием совместными усилиями электронных библиотек таких результатов с доказательствами [de Bruijn, 1991; MacKenzie, 2001; Hales, 2008].

Пожалуй, наиболее известным и общим выражением характерной для этого направления установки оказался *The QED*[4] *Manifesto* [Boyer et al., 1994]. Для создателей манифеста (главным из которых был, по-видимому, Роберт Бойер) принципиальны были его анонимность и открытый доступ для всех желающих принять участие в проекте. Такая позиция была выражена со всей возможной решительностью [ibid., p. 250–251]. Сам же QED-проект виделся «значительным научным предприятием, требующим объединения усилий сотен глубоких математических умов, изрядной изобретательности многих ученых-компьютерщиков, а также широкой поддержки и руководства со стороны исследовательских организаций» [ibid., p. 238].

Проект QED, несмотря на разнообразную работу, которая была проделана в этом направлении, все еще весьма далек от успешного завершения. Фрейк Видайк (Freek Wiedijk, Нидерланды) указывает

[3] В 2006 г. он закончил Свободный университет Берлина (Freie Universität Berlin) и в 2009 г. получил там же степень PhD. Я использую пост из его персонального блога (http://blog.felixbreuer.net), озаглавленный “From Open Science to Open Mathematics” (от 14 июля 2013 г.).

[4] QED – это “quod erat demonstrandum”, «что и требовалось доказать», стандартная латинская аббревиатура, которой и до сих пор иногда помечается окончание математического доказательства.

две основные причины этого. Во-первых, проект не смог стать массовым в силу недостаточного внимания разработчиков к проблеме коммуникации:

> *Коммуникация* – это как раз тот аспект, в котором «системы QED-типа», в своем текущем состоянии, приобрели дурную репутацию. Формализация совершенно бесполезна с точки зрения общения и обмена той математикой, которая в ней формализована. Именно в этом отношении формальная математика более всего нуждается в улучшении [Wiedijk, 2007, p. 122].

Во-вторых, современная «формализованная математика» очень не похожа на реальную математику с ее многовековым опытом, разрыв между ними слишком велик, чтобы задача полной формализации математики могла обрести достаточное число сторонников и сотрудников. На мой взгляд, эта вторая причина может быть понята как частный случай первой. Существующие «системы QED-типа», такие «пруверы», как Mizar, семейство HOL (это HOL Light, Isabelle/HOL и ProofPower) и Coq, реализуют *конкурирующие* подходы в основаниях математики, что делает любую из них не слишком пригодной для эффективного *объединения* в деле формализации всей существующей математики.

В 2014 г. молодой израильский математик Итай Вайс (Ittay Weiss)[5] предложил перейти к версии 2.0 the QED Manifesto, которая была бы нацелена на определенную *смену приоритетов*, принимая за отправную точку оценку сложившегося положения, данную Видайком в статье 2007 г. Главная идея Вайса состоит в том, чтобы перенести центр внимания с минимизации *неформальности* математических рассуждений на минимизацию их *нечитабельности*, которая чревата *провалом коммуникации* [Weiss, 2016, p. 804–806]. QED 1.0 призывал полностью формализовать математику с целью осуществления автоматической проверки доказательств, которая позволила бы выявить не замеченные ранее ошибки и достичь окончательной достоверности. QED 2.0 же предлагает формализацию математики с целью облегчения коммуникации. Поэтому здесь речь идет о такой системе, которая *формальна* ровно настолько, насколько это нужно, чтобы обеспечить максимально гибкую коммуникацию, но достаточно *неформальна*, чтобы не налагать ограничения на математическое творчество [ibid., p. 808]. По сути QED 2.0, утверждает Вайс, это максимально ориентированная на коммуникацию революционная «идеология набора

[5] Позиция Вайса знаменательна как взгляд современного чистого математика. Он получил бакалаврскую и магистерскую степени по математике (2001 и 2003) в первом университете Израиля, Hebrew University of Jerusalem, а затем в 2007 PhD в Utrecht University (Нидерланды). В настоящее время он преподает в Великобритании, University of Portsmouth. Его основные научные интересы лежат в таких областях, как теория гомотопий, общая топология и теория категорий.

текста (a typesetting ideology)», вдохновленная как успехом, так и недостатками системы TeX/LaTeX, и которая «не имеет ничего общего ни с формальной математикой, ни с логикой, ни с семантикой» [ibid., p. 813]. Перед нами явная попытка сделать конкретный шаг в направлении того, что Ф. Бройер называет «открытой математикой». Впрочем, Вайс не предлагает просто заменить QED 1.0 на QED 2.0, скорее, он говорит об их параллельном развитии в надежде на позднейшее слияние [ibid., p. 804].

От теоретических к практическим основаниям математики

Трансформация математической практики в условиях цифрового общества, по-видимому, обещает быть не только широкомасштабной, но и глубинной. Происходящие преобразования проникают вплоть до *оснований математики*. Главная тенденция может быть описана как смещение внимания с *теоретических* оснований математики (понятых в духе Д. Гильберта) на *практически ориентированные* основания математики. Последнее означает ориентацию не только и не столько на теоретическое обоснование, тем более окончательное обоснование, сколько на *обеспечение локальной надежности в потоке коммуникации*.

Новейший поворот в обсуждении проблемы оснований оказался спровоцирован вхождением в математическое сообщество новых «членов», я имею в виду *компьютеры*. Один из патриархов разработки компьютерных «пруверов», нидерландский математик Николас де Брёйн (Nicolas G. de Bruijn), писал о том, что попытка «объяснить математику машине», во-первых, излечивает человека от математического платонизма, а во-вторых, заставляет его обнаружить «неестественность» традиционного теоретико-множественного подхода и приступить к переосмыслению оснований математики [de Bruijn, 1991, p. 11]. Фрейк Видайк, которого я уже цитировал выше, также подчеркивает важность прояснения вопроса оснований для преодоления тупика, в который зашла реализация проекта QED в результате конкуренции многих несовместимых «пруверов» [Wiedijk, 2007, p. 131].

Использованное мною выражение «практические основания математики (practical foundations of mathematics)» сделал популярным британский математик Пол Тейлор, выпустивший под таким названием книгу [Taylor, 1999]. Тейлор не дает прямого ответа на вопрос, как следует понимать в его устах прилагательное «практические». Как писал один из его рецензентов, «несколько таинственное слово “практические” в заглавии всего лишь исподволь намекает, что автор не хочет, чтобы “основания (foundations)” понимали в каком-либо “фундаменталистском (foundational)” смысле» [Streicher, 2000, p. 155]. Сам автор так характеризует содержание своей книги:

> Нашему предмету следует иметь дело с основополагающими идиомами доказательства (argument) и построения (construction) в математике и программировании и стремиться объяснить их (подобно тому, как это делается в фундаментальной физике) исходя из более общих и основополагающих явлений. Это “дискретная математика для взрослых (discrete math for grown-ups)” [Taylor, 1999, p. viii].

Описание «практических оснований» через понятие «дискретной математики» явно указывает на связь «практического», в словоупотреблении Тейлора, с идеей тесного союза чистой математики и computer science.

Американский математик Томас Хейлс в обзорной статье «Формальное доказательство» пишет:

> С точки зрения Бурбаки[6], основания математики – это огороженный веревками музейный экспонат, предназначенный для молчаливого восхищения, но не для непосредственного использования. Существует противоположный взгляд, считающий предприятие по выявлению оснований незавершенным до тех пор, пока они не реализованы на практике и не выписаны во всей полноте. <...> Оказалось необходимым начать все заново и переоборудовать (retool) основания математики, чтобы добиться практической эффективности, сохранив, однако, их надежность и строгую красоту [Hales, 2008, p. 1371].

Заканчивает же он свою статью следующей примечательной ремаркой: «нам недостает практического понимания оснований математики (we fall short of a practical understanding of the foundations of mathematics)» [ibid., p. 1379].

Ушедший из жизни в 2017 г. филдсовский медалист Владимир Воеводский (the School of Mathematics at the Institute for Advanced Study in Princeton) последние двенадцать лет своей жизни посвятил разработке нового подхода к проблеме оснований математики, который, на мой взгляд, также может быть охарактеризован как «практический» в указанном в начале этого раздела смысле[7]. Это попытка

---

[6] Речь идет о группе французских математиков, образовавшейся в 1930-е гг. и публиковавшей свои результаты под коллективным псевдонимом «Николя Бурбаки». Деятельность группы была одним из первых примеров командной работы в сфере чистой математики.

[7] О подходе Воеводского много говорит и пишет А.В. Родин (http://philomatica.org/). Ср., например, его интерпретацию названного подхода в контексте противопоставления *конструктивного* понимания аксиоматического метода классическому (гильбертовскому) его пониманию [Rodin, 2018].

приблизиться к тому сочетанию формальной строгости и естественной коммуникативности, о котором мечтает Итай Вайс (см. выше). Проект Воеводского получил название «гомотопическая теория типов (Homotopy Type Theory, HoTT)» или «унивалентные основания математики (Univalent Foundations of Mathematics, UF)». Он видел в своем подходе обращение к естественному языку математических рассуждений, своего рода альтернативу достаточно искусственному теоретико-множественному языку (ZFC). Этот естественный язык (более простой и интуитивный), полагал он, лучше подходит для формализации математики с помощью современных «пруверов» (таких, как Coq) и предлагает единообразный подход как к конструктивной, так и к классической математике [Voevodsky, 2011]. Новый язык призван также способствовать через повсеместное применение таких «пруверов» надежности математических результатов и эффективной кооперации в среде математиков [Monroe, 2014, p. 14]. В 2012–13 гг. международная группа (около 25 человек), вдохновленная идеями Воеводского, работала в Принстоне над созданием 600-страничного учебника, предлагающего изложение основ нового подхода, учебник этот находится в свободном доступе [UFP, 2013]. Важно подчеркнуть, что новые основания математики *не претендуют быть замкнутой и окончательной структурой*. Как пояснял Воеводский в интервью 2013 г.:

> Мы не хотим, чтобы она была совсем замкнута, мы бы хотели, чтобы она была такой же живой, как человеческий язык: на каждой конкретной стадии иметь ядро, которое в некотором смысле проверено и надежно. А вне этого ядра будет некая развивающаяся область. Когда она достаточно вырастет, то с ее помощью можно построить следующее ядро[8].

Имеются попытки вписать концепцию HoTT/UF в традиционную картину основных направлений философии математики, например, дав им последовательно структуралистскую интерпретацию [Awodey, 2014]. На мой взгляд, более точно описывают ситуацию те, кто видит в них «момент водораздела», «новый взгляд на то, как основания должны соотноситься с математической практикой» в рамках «практического прочтения структуралистского тезиса» [Tsementzis, 2017, p. 3583, 3590–3592]. Пока затруднительно сказать, какое будущее ждет идеи Воеводского, однако их появление ощутимо свидетельствует о том, что происходящее на наших глазах изменение математической практики не сводится к «ряби на поверхности воды», оно затрагивает ее «до последней глубины».

[8] Интервью О. Баклицкой-Каменевой с В. Воеводским 2013 г. «Математика как метод стабилизации разума». URL: https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/433832/Vladimir_Voevodskiy_Matematika_kak_metod_stabilizatsii_razuma (дата обращения: 18.03.2018).

* * *

В качестве подведения итога отмечу: создается впечатление, что магистральным направлением трансформации математической практики в современном цифровом обществе является поиск более эффективных способов распределения познания за счет *кооперации* с использованием возможностей, предоставляемых новейшими социоцифровыми технологиями. Это делает остро насущной проблемой современной математики – налаживание эффективной *коммуникации* внутри сообщества. Распределение познания (происходит оно стихийно или осознанно) имеет шанс на успех лишь в случае слаженной командной работы, согласованных действий в рамках определенного разделения функций и обязанностей. Последнее же предполагает высокий уровень взаимного *доверия*. Сопряженное с последним увеличение *рисков* требует, в свою очередь, выработки новых эффективных механизмов разделения *ответственности* и обеспечения оправданности требуемого уровня доверия. Сказанное относится в равной степени как к людям, так и к компьютерам. Происходящее на наших глазах изменение характера распределения познания в рамках математического сообщества приводит в движение всю цепочку *экспертной оценки* (доверие – риск – ответственность) и неизбежно должно привести к реорганизации соответствующих абстрактных экспертных систем. Об этом в общем виде размышлял еще в книге «Последствия современности» (1990) Энтони Гидденс [Giddens, 2011], а применительно к социологии математических доказательств в компьютерную эпоху – Дональд Маккензи [MacKenzie, 2001, p. 7–13]. Важно отметить, что именно неработоспособность существующих методов экспертной оценки математических результатов послужила и для Владимира Воеводского одним из основных стимулов интереса к компьютерной проверке доказательств, а последнее потребовало пересмотра оснований математики[9]. In nuce, решение «проблемы сложности» в математике на путях коммуникативного обеспечения надежности требует, по всей видимости, радикальной перестройки всего здания математики, начиная с его оснований.

[9] См. интервью С. Беляевой с В. Воеводским 2011 г. «Веские основания». URL: http://www.poisknews.ru/theme/science/1348/ (дата обращения: 10.03.2018).

Список литературы / References

Awodey, 2014 – Awodey, S. "Structuralism, Invariance, and Univalence", *Philosophia Mathematica (Series III)*, 2014, vol. 22, no. 1, pp. 1–11.

Baker, 2015 – Baker, A. "Non-Deductive Methods in Mathematics" (2009; substantive revision – 2015), in: Zalta, E. N. (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. [https://plato.stanford.edu/entries/mathematics-nondeductive, accessed on 03.04.2018]

Boyer et al., 1994 – Boyer, R. S., de Bruijn, N. G., Huet, G., Trybulec, A. "Panel Discussion: Mechanically Proof-Checked Encyclopedia of Mathematics: Should We Build One? Can We?", in: Bundy, A. (ed.), *Automated Deduction – CADE-12: 12th International Conference on Automated Deduction. Nancy, France, June 26 – July 1, 1994. Proceedings*. Berlin: Springer, 1994, pp. 237–251.

Davies, 2005 – Davies, E. B. "Whither Mathematics?", *Notices of the American Mathematical Society*, 2005, vol. 52, no. 11, pp. 1350–1356.

de Bruijn, 1991 – de Bruijn, N. G. "Checking Mathematics with Computer Assistance", *Notices of the American Mathematical Society*, 1991, vol. 38, no. 1, pp. 8–15.

Giddens, 2011 – Giddens, A. *Posledstviya sovremennosti* [The Consequences of Modernity]. Moscow: Praksis, 2011. 352 pp. (In Russian)

Hales, 2008 – Hales, T. C. "Formal Proof", *Notices of the American Mathematical Society*, 2008, vol. 55, no. 11, pp. 1370–1380.

Hutchins, 1995 – Hutchins, E. *Cognition in the Wild*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1995. 379 pp.

Lakatos, 1978 – Lakatos, I. "Infinite Regress and Foundations of Mathematics", in: Lakatos, I. *Mathematics, Science, and Epistemology. Philosophical Papers. Vol. 2*. Ed. by J. Worrall, G. Currie. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1978, pp. 3–23.

Lamb, 2016 – Lamb, E. "Maths Proof Smashes Size Record: Supercomputer Produces a 200-Terabyte Proof – But Is It Really Mathematics?", *Nature*, 2016, vol. 534, pp. 17–18.

Latour, 1996 – Latour, B. "Cogito ergo sumus! Or Psychology Swept Inside Out by the Fresh Air of the Upper Deck... A Review of Ed Hutchins, *Cognition in the Wild*, Cambridge, MA: The MIT Press, 1995", *Mind, Culture, and Activity*, 1996, vol. 3, no. 1, pp. 54–63.

MacKenzie, 2001 – MacKenzie, D. *Mechanizing Proof: Computing, Risk, and Trust*. Cambridge, MA: The MIT Press, 2001. 439 pp.

Monroe, 2014 – Monroe, D. "A New Type of Mathematics? New Discoveries Expand the Scope of Computer-Assisted Proofs of Theorems", *Communications of the ACM*, 2014, vol. 57, no. 2, pp. 13–15.

Norman, 1993 – Norman, D. A. *Things That Make Us Smart: Defending Human Attributes in the Age of the Machine*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1993. 304 pp.

Perry, 2013 – Perry, M. "Distributed Cognition", in: Paschler, H. (ed.), *Encyclopedia of the Mind*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, 2013, pp. 258–260.

Rheingold, 2012 – Rheingold, H. *Net Smart: How to Thrive Online*, Cambridge, MA: The MIT Press, 2012. 332 pp.

Rodin, 2018 – Rodin, A. “On the Constructive Axiomatic Method”, *Logique et Analyse*, 2018, vol. 61, no. 242, pp. 201–231.

Shaposhnikov, 2018 – Shaposhnikov, V. A. “Matematicheskaya praktika v usloviyakh sotsiotsifrovoy revolyutsii” [“Mathematical Practice under Socio-Digital Revolution”], in: Ershova, R. V. (ed.). *TSifrovoye obshchestvo kak kul’turno-istoricheskiy kontekst razvitiya cheloveka, 14–17 fevralya 2018, Kolomna [Digital Society as a Cultural and Historical Context of Human Development. International Conference, Kolomna, Russia, February 14–17, 2018. Proceedings*]. Kolomna: Gosudarstvennyy sotsial’no-gumanitarnyy universitet, 2018, pp. 431–436. (In Russian)

Streicher, 2000 – Streicher, T. “Review: Paul Taylor, Practical Foundations of Mathematics, Cambridge University Press, 1999”, *Science of Computer Programming*, 2000, vol. 38, no. 1-3, pp. 155–157.

Taylor, 1999 – Taylor, P. *Practical Foundations of Mathematics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999. 584 pp.

Tsementzis, 2017 – Tsementzis, D. “Univalent Foundations as Structuralist Foundations”, *Synthese*, 2017, vol. 194, no. 9, pp. 3583–3617.

Tymoczko, 1986 – Tymoczko, T. “Making Room for Mathematicians in the Philosophy of Mathematics”, *The Mathematical Intelligencer*, 1986, vol. 8, no. 3, pp. 44–50.

UFP, 2013 – *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. [Princeton, NJ:] The Univalent Foundations Program, Institute for Advanced Study, 2013. 469 pp. [https://homotopytypetheory.org/book/, accessed on 16.03.2018].

Voevodsky, 2011 – Voevodsky, V. “Univalent Foundations of Mathematics”, in: Beklemishev, L. D., de Queiroz, R. (eds.), *Logic, Language, Information and Computation: 18th International Workshop, WoLLIC 2011, Philadelphia, PA, USA, May 18–20, 2011. Proceedings (LNAI 6642)*. Berlin: Springer-Verlag, 2011, p. 4.

Weiss, 2016 – Weiss, I. “The QED Manifesto after Two Decades – Version 2.0”, *Journal of Software*, 2016, vol. 11, no. 8, pp. 803–815.

Wiedijk, 2007 – Wiedijk, F. “The QED Manifesto Revisited”, *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 2007, vol. 10 (23), pp. 121–133.