

ФЕНОМЕН ЧИСЛА С ПОЗИЦИЙ ПСИХОЛОГИЗМА: МОЖНО ЛИ УТВЕРЖДАТЬ, ЧТО ЧИСЛА «СОЧИНЯЮТСЯ»?

Бажанов Валентин Александрович – доктор философских наук, заслуженный деятель науки РФ, профессор. Ульяновский государственный университет. Российская Федерация, 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42; e-mail: vbazhanov@yandex.ru



В статье предпринимается попытка представить генезис и природу числа под углом зрения такого эпистемологического направления, как психологизм. Формулируются вопросы, которые способны пролить новый свет на то, что понимается под числом, а именно: каков модус «существования» числа? Правомерны ли вопросы о том, в виде чего, каких образований, существует число; какая реальность выступает естественным «носителем» числа? Допустимо ли считать, следуя реализму, число сущностью, независимой от человека? Какие соображения заставляют усомниться в независимом от человека статусе числа – статусе, принятом многими успешными математиками, поскольку этот статус снимает ключевые вопросы, касающиеся природы числа? Можно ли утверждать и если да, то в какой мере, что феномен числа, кроме иных факторов, задается ментальной и телесной организацией человека, но прежде всего культурными особенностями общества? Показывается, что новейшие исследования в области культурной и социальной нейронауки предоставляют достаточно убедительные аргументы в пользу перспективности психологизма в качестве концепции, позволяющей объяснить многие вопросы философии математики и идеи Я. Хакинга о возможности «сочинения реальности». Эти аргументы позволяют утверждать, что и природа, и происхождение числа могут быть осмыслены как абстрактные ментальные конструкции познавательной деятельности человека, которые возникают и эффективно используются во взаимодействии и на основе процедур репрезентации многообразия элементов и отношений реальности в контексте определенных когнитивных систем.

Ключевые слова: математика, число, психологизм, Я. Хаккинг, культура, субитация, язык, концептуальная метафора

THE PHENOMENON OF NUMBER FROM THE LENS OF PSYCHOLOGISM: CAN WE CLAIM THAT NUMBERS ARE BEING “MADE UP”?

Valentin A. Bazhanov – DSc in Philosophy, Professor. Ulyanovsk State University. 42 L. Tolstoy Str., Ulyanovsk 432017, Russian Federation; e-mail: vbazhanov@yandex.ru

The article explores the genesis and nature of number from the perspective of psychologism, an epistemological trend. It formulates a series of questions aimed at reexamining our understanding of number: What is the mode of existence of number? In what forms or formations does number exist, and what reality serves as its natural “carrier”? Is it justified, following realism, to regard number as an entity independent of human beings? What reasoning challenges the human-independent status



of number – a stance embraced by many successful mathematicians – given that this status overlooks key questions about the nature of number? To what extent can it be argued that the phenomenon of number is shaped, among other factors, by the mental and bodily organization of humans, as well as by the cultural characteristics of society? The article draws on recent research in cultural and social neuroscience, which supports the relevance of psychologism as a framework for addressing many questions in the philosophy of mathematics. It also engages with Ian Hacking's idea of "making up reality" to further illuminate the discussion. Ultimately, the nature and origin of number are defined as abstract mental constructions arising from human cognitive activity. These constructions emerge and are effectively utilized through the interaction and representational procedures of diverse elements and traits within a given cognitive system.

Keywords: mathematics, number, psychologism, I. Hacking, culture, subitization, language, conceptual metaphor

Числа суть создания свободного человеческого духа.

Р. Дедекинд

О природе числа написаны едва ли не горы книг и статей и с позиций реализма (платонизма), который склонен считать, что новые виды чисел в математической реальности открываются подобно географическим открытиям новых земель, и с позиций антиреализма, который склонен отождествлять числа с конкретными физическими объектами или рассматривать их в качестве особых структурных образований, в некотором смысле обобщающих массивы эмпирических данных (структурализм), или же трактовать как полезные «фикции» для упорядочения информации, которую человек черпает из внешнего мира (фикционализм).

Обсуждение этих важных вопросов активно продолжается и в последнее время [Tennant, 2022]. Попытки исследовать природу числа, несмотря на громадную литературу, не прекращаются уже много десятков лет, поскольку число относится к базисным, фундаментальным понятиям, которыми оперирует любая дисциплина, претендующая на статус «точной» или стремящейся приблизиться к таковой. При этом крепнет убеждение, что «число – это культурная конструкция» [Samuels, Snyder, 2024, p. 67], – убеждение, которое представляется несовместимым с трактовкой числа сторонниками реализма. Если усилить данное положение, то и сама математика представляется в качестве сугубо «человеческого предприятия, границы которого задаются биологической организацией человека» [Nunez, Lakoff, 2005, p. 123].

Каков модус «существования» числа? Правомерны ли вопросы о том, в виде чего, каких образований, существует число; какая реальность выступает естественным «носителем» числа? Допустимо ли считать, следуя реализму, число сущностью, независимой от человека?



Какие соображения заставляют усомниться в независимом от человека статусе числа – статусе, принятом многими успешными математиками, поскольку этот статус снимает ключевые вопросы, касающиеся природы числа? Можно ли утверждать и если да, то в какой мере, что феномен числа, кроме иных факторов, задается ментальной и телесной организацией человека, но прежде всего культурными особенностями общества?

Перспективные ответы на поставленные вопросы может дать такое направление, как психологизм, который ныне переживает своего рода ренессанс [Бажанов, 2016; Rudnicki, Lukowski, 2024]. Природа и феномен числа под углом зрения психологизма не рассмотрены сколько-нибудь обстоятельно. Хотя в истории логико-математических наук обращение к точке зрения психологизма было принятым некоторыми выдающимися мыслителями, как, например, Дж. Миллем и Дж. Булем в середине XIX столетия [Stone, 2022; Kusch, 2024], но оно оказалось категорически и надолго отвергнутым после трудов и суровой критики психологизма со стороны Г. Фреге и Э. Гуссерля, признанной очень убедительной его последователями и почти на столетие переместившей число на далекую периферию интересов и внимания исследователей – как математиков, так и философов.

Число в контексте психологизма. «Сочинение» чисел

Бурное развитие когнитивных исследований и особенно нейронауки на рубеже XX–XXI вв. подводят к мысли о том, что новые грани в понимании природы числа могут быть высвечены именно с позиций психологизма и достижений нейронауки. Анализ происхождения и природы числа под углом зрения психологизма способствовал введению такого направления когнитивной науки, которое можно охарактеризовать понятием «нейропсихологизма»¹ [Marshall, 2018, p. 41].

Оппозиция *психологизма* и *антипсихологизма* в случае логико-математического знания задается методологическими подходами, принятыми в данных направлениях: в одном подходе логика и математика рассматриваются как науки, признающие существование особых «законов мышления» или соответствующей онтогенетической реальности. Считается, что они воплощают эти «законы» в некоторой объективированной форме – в виде рассуждений, представленных в конкретном языковом материале (*психологизм*). Другой же

¹ Впрочем, это понятие пока не получило сколько-нибудь широкого распространения и в основном употребляется как рабочее лишь в области клинической нейропсихологии.



подход категорически отрицает возможность истолкования логики и математики как своего рода моделей мышления, связывая их законы лишь с материей рассуждения, не признавая их генетическую и естественную укорененность в живом процессе мышления (*антипсихологизм*).

Если иметь в виду свойство всего живого, связанного с симулянтным восприятием предметов до трех-четырех, называемое «чувством числа», субитацией, которое несет ответственность за проточисловые и арифметические способности человека [Dehaene, 2011], равно как и протогеометрические способности живых существ [Hogol, 2020, p. 62–66; Pantsar, 2024a], то можно предположить, что нейронные сети, в конечном счете детерминирующие психологические особенности человека, определенным образом (прежде всего в случае человека) проявляют себя и в возникновении представлений о числе, и в генезисе самого феномена числа, понимаемого как некоторое ментальное образование, функционирующее в конкретных культурных средах и в контексте некоторых когнитивных систем. При этом необходимо учитывать такую особенность нейронных сетей (и мозга в целом), как поразительная способность к обобщениям, отталкиваясь от очень и очень ограниченного количества эмпирических данных, имея в виду, например, данные восприятия или даже единичные ощущения [Li et al., 2024, p. 9].

Вероятно, что эта способность относится к трем «базисным» системам человека (*core systems*), которые несут ответственность за саму возможность существования человека как самодостаточного и автономного субъекта едва ли не с момента рождения [Spelke, 2022, p. XVIII–XIX]. Эти системы навигации, определения места и пространства нахождения человека, объектов и их конфигурации, которые предстают перед его взором, а также их количества, выраженных числом².

Способность любых более или менее высокоразвитых существ «интуитивно», помимо и вне каких-либо сознательных операций, определять количество предметов до трех-четырех является универсальной: диапазон обладания ею очень широк – от рыбок гуппи до человеческих племен охотников, в языках которых фактически отсутствуют сколько-нибудь развитые системы слов, которые принадлежат к категории числительных [Brannon, 2005, p. 85]. При этом при оценке количеств предметов (т.е. их число) возбуждаются нейроны в определенных областях мозга (доминирует префронтальная

² Своего рода «вспомогательными» системами часто считают системы, которые позволяют определять формы предметов, взаимодействия с другими субъектами *tete-a-tete*, а также с социальным окружением [Spelke, 2022, p. XVIII–XXI]. Существование такого рода систем вытекает из концепции модулярности Дж. Фодора [Jenkin, 2020, p. 253].



кора) как у человека, так и, скажем, обезьян [Nieder, 2016], хотя на процессы упорядочивания ряда чисел (5 больше 3) мозг реагирует более активно, чем на их «простое» восприятие, без задачи упорядочения, а кардинальные числа (например, 5) и ординальные ($1 < 3 < 5$) обрабатываются и воспринимаются мозгом по-разному, хотя и пересекающимися областями [Lyons, Beilock, 2013, p. 17060]. Семантические аспекты числового познания активизируют области теменной коры, а синтаксические, связанные с кодированием чисел (и их цифровой репрезентации), – затылочно-височные отделы мозга [Piazza, Eger, 2016, p. 262–263]. Некоторые нейроны мозга возбуждаются в качестве реакции на «точное» (т.е. конкретное) число, другие нейроны возбуждаются, но слабее как реакция на числа, близкие к конкретному числу [Whalley, 2018]. Нейронные коды у младенцев, еще не освоивших язык, не зависят от модальности, в которой демонстрируются множества предметов, которым можно приписать последовательности чисел [Hyde, 2023, p. R. 402]. Таким образом, фундамент числа представляет собой онтогенетическое образование в том смысле, что мозг «подготовлен» сформировать функционал, относящийся к тому, что получило название «числа» [Carey, Barner, 2019]. На статус числа, его место и роль в культуре влияют и внутрипсихологические, и культурные факторы, а также широко распространенные среди живых существ механизмы социального научения. В случае человеческого общества речь идет о целостной системе «мозг – социум – культура», закономерности эволюции каждого элемента которой плотно связаны с эволюцией всех других. Осмысление ее динамических свойств, включая репрезентацию числа, может происходить в контексте идеи биокультурного со-конструктивизма [Бажанов, 2019], когда имеется в виду порождение и постоянное параллельное «строительство» и преобразования всех компонентов данной системы. Число с такого рода позиций выступает как фундамент динамической системы формирования и развития математики как науки, которая представляет собой важный компонент культуры, постоянно подпитывающий прогрессивное движение общества, связанное с совершенствованием техники и технологий.

Психологические особенности восприятия чисел проявляются во множестве феноменов, прямо или косвенно связанных с доминирующей культурой. Так, в Китае число 4 символизирует конец («смерть»), а число 8 изобилие («богатство»), в некоторых европейских странах «несчастливым» числом считается 13. Список таких «магических» сопоставлений и операций (типа «гематрии») легко продолжить. Они плотно вписаны во многие культурные образования и являются их имманентными элементами.

Психологически некоторые числа воспринимаются как «более четные», как, например, 64 по сравнению с 62, а другие как «более нечетные», как, например, 23 по сравнению с 27. Объяснить эти



эффекты можно тем, что 64 «подсознательно» легче делится на 4, 27 на 3, а то, что 23 является простым надо еще мысленно установить, что обычно и происходит на подсознательном уровне [Heubner et al., 2018, p. 14].

Топология письма, принятая в определенных культурах (например, слева направо в культурах европейского типа, справа налево в арабской и еврейской культурах), также дает себя знать в виде так называемого SNARC-эффекта (spatial-numerical association of response codes effect), относительности когнитивных механизмов к специфике письменных шрифтов, которые касаются упорядочения предметов и чисел носителями разных культур. Одни и те же конфигурации множеств предметов воспринимаются и описываются в разных культурных дискурсах по-разному, причем этот эффект отчетливо проявляет себя у носителей одной культуры, но уже в несколько сглаженном виде у носителей нескольких близких к ней культур, которые могут использовать различные виды письма в своей повседневной практике [Koch, Huber et al., 2023]³.

Различие психологической организации детей и взрослых, в частности, выражается в их различном восприятии больших и малых чисел: при демонстрации чисел от 1 до 10 дети 8–11 лет преимущественно выбирают большие числа, а взрослые, напротив, – меньшие по величине числа [Towse et al., 2014, p. 5]. Эмоциональный фон также довольно заметно влияет на процесс идентификации места числа на числовой оси: лица с положительными эмоциями обычно смещали числа вправо, а с отрицательными влево [Sabaghpour et al., 2023]. Здесь велика роль операций с материальными предметами и накопление соответствующего опыта, которые закладывают основания представлений о числовых понятиях и способствуют генезису числа как такового. Поскольку эти операции так или иначе связаны с телесной организацией человека, особенно в детском возрасте манипуляциями при помощи пальцев, то допустимо утверждение, что в конечном итоге число – «производное непосредственной деятельности человека» [Fayol, Seron, 2005, p. 15–16; Carey, 2018, p. 467–468] и «культурный феномен», выраженный в абстрактной форме количественных и пространственных соотношениях [Tang, Tang, 2022, p. 254; Pantisar, 2024b], который задается и совершенствуется посредством числовых понятий [Rips et al., 2008, p. 640]. Данные обстоятельства приходится учитывать в инженерных разработках разнообразных искусственных систем, включая искусственный интеллект и робототехнику [Di Nuovo, Jay, 2019, p. 9].

Я. Хакинг в определенном плане вслед за априоризмом И. Канта, нейрофизиологические аспекты которого раскрылись в резуль-

³ Похожий эффект проявляется в процессе упорядочения нечисловых последовательностей предметов и/или символов [Abbondanza et al., 2021].



тате открытий навигационной системы мозга⁴, обратил внимание на тот факт, что новые элементы реальности высвечиваются в результате введения новых понятий. Новые элементы «сочиняются», но на онтогенетических основаниях, типа клеток и ансамблей позиционирования (навигации) в нейронных сетях. Сквозь призму этих («сочиненных») понятий мы начинаем видеть то, что раньше не замечали, о чем раньше не догадывались и не признавали существующим [Hacking, 2006; Хакинг, 2024, с. 124–126]. В этом смысле числа также «сочиняются», и в этом можно усмотреть их глубокие психологические основания и «подтекст»⁵, подталкивающий к тому, чтобы числу приписывать объективно-реальный статус и модус существования.

Таким образом, и психологические, и социально-культурные факторы в конечном счете детерминируют и сопровождают «материю» числа и его восприятие.

Можно ли определить, что такое «число»?

С одной стороны, многочисленные и постоянно доказывающие свою чрезвычайную практическую эффективность приложения числа (в смысле вычислений тех или иных свойств, закономерностей, отношений и т.п.) придают числу статус одного из главных элементов и инструмента человеческого познания и в обыденной, и в научной жизни, а с другой – очень сложно дать сколько-нибудь полную дефиницию тому, что такое число. Можно, разумеется, утверждать, что число – важнейший познавательный и культурный «механизм», который репрезентирует природу, окружающую нас реальность, непосредственно связано с нашим сознанием и подсознанием, в онтогенетическом смысле с активностью мозга, но такое определение вряд ли можно оценить как корректное, полное (соразмерное), поскольку оно, вообще говоря, не проливает свет на то, что такое число в смысле его «существенных» характеристик. Очевидно, что понятие числа является абстрактным и обладает высокой степенью *полисемии*. Возможно,

⁴ Э. Мозер, которому была присуждена Нобелевская премия (месте с Дж. О'Кифом и М.-Б. Мозер), прямо говорит о том, что это открытие соответствует смыслу кантианских идей, поскольку «разум организует систему, благодаря которой мы воспринимаем мир... хотя клетки навигационной системы мозга от рождения присущи и другим живым существам, например молодым крыскам, которые еще не успели не приобрести какого-либо опыта» [Moser, Furstenberg, 2024, p. 6–7].

⁵ Такого рода «сочинение» имеет и некоторые «издержки» [Deigan, 2024, p. 61], которые, например, выражаются в нечеткости содержания понятий, но их анализ и специфика операций с ними выходит за рамки данной статьи.



что по отношению этому понятию можно с уверенностью приписать лишь функционал репрезентации некоторой реальности⁶. В этом плане число где-то подобно понятию денег. Деньги – это ведь не более, чем кусочек бумаги, пластика или металла; их номинал часто значительно превышает стоимость и бумаги, и металла, и способа их изготовления. Однако «стоимость» денег, как известно, определяется всей совокупностью экономических, политических, социальных и иных отношений, которыми характеризуется социум, в котором эти деньги приняты и «работают». Конвертация одних денег (валют) в другие плотно фиксирует сравнительную ценность тех реалий, в которых деньги играют роль универсальной меры обмена и распределения. Подобно тому, как основная функция денег с позиций репрезентации некоторых элементов различных типов реальности – замещение этих элементов и отношений между ними своего рода абстрактной универсальной конструкцией, привязанной к указанным типам, так и число – абстрактная ментальная конструкция познавательной деятельности человека, которая используется во взаимодействии и на основе процедур репрезентации многообразия элементов и отношений реальности.

Дать определение понятию «число», которое было бы в определенном смысле логически строгим, по той причине, что оно в высшей степени абстрактно, фактически невозможно. Вовсе не случайно в «Математической энциклопедии» понятие числа определяется как «основное понятие математики, сложившееся в ходе длительного историч.[еского] развития» [Нечаев, 1985, с. 873]. Между тем в математике имеются и другие «основные понятия» – множество, функция, отношение, структура, категория и т.д. И все они сложились (и продолжают складываться) в ходе исторического развития.

В «Энциклопедии Британника» число определяется как «любое из целых положительных или отрицательных чисел, или любое из множества всех действительных или комплексных чисел, причем последнее содержит все числа вида $a + bi$, где a и b – вещественные числа, а i обозначает квадратный (числа вида bi иногда называют чисто мнимыми чтобы отличить их от “смешанных” комплексных чисел). Вещественные числа состоят из рациональных и иррациональных чисел...» [Britannica – Number, 2024]. Фактически число определяется посредством апелляции к самому числу и некоторым разновидностям чисел.

⁶ Аналогичные претензии предъявляются и ко многим другим научным понятиям, например понятию «механизм» или «пластичность» мозга в нейронауке, хотя без их употребления, как и иных понятий, приобретающих метафорический оттенок, при описании работы нейронных сетей и мозга в целом обойтись крайне проблематично – если вообще возможно [Tseng, Cheng, 2024; Seblani et al., 2024].



Оба определения в столь авторитетных изданиях по существу являются некоторого рода дескрипциями тех свойств и их генезиса, которые сопряжены с числом и с разновидностями чисел.

Традиционный подход к интерпретации природы числа восходит к трудам Г. Фреге и Б. Рассела, которые представляли число в виде «квантификационного понятия», порождаемого отношением изоморфизма между некоторыми множествами объектов [Ландини, 2024, с. 55–64]. Этот подход, предполагавший позицию логицизма, критиковался Л. Витгенштейном, считавшим число не понятием и объектом, как у Фреге и Рассела, а «логической формой», «свойством свойств» и методом интерполяции [Wittgenstein Lectures, 1980, II 32, p. 343]. Анализ разногласий между Фреге, Расселом и Витгенштейном является посторонним для целей данной статьи⁷.

Важно иметь в виду, что множество чисел и представления об их свойствах постоянно расширяются: натуральное число, затем признается существование отрицательного числа, вводится число ноль, числовой ряд представляется в виде числовой оси (в работах XVII–XVIII вв. Дж. Непера и Дж. Уоллиса), он простирается в область отрицательных чисел, и это графическое представление кажется настолько естественным, что оно может восприниматься (почти) как заданное априори, врожденное⁸; появляются комплексные, гиперкомплексные числа, кватернионы и т.д.

Язык и число

Все эти числа вводятся с помощью языковых конструкций. Благодаря гению Г. Кантора мы можем рассуждать о бесконечностях, которые также описываются определенного рода «числами» – кардинальными и ординальными, которые относятся и к несчетным множествам, упорядоченным согласно их «мощности», т.е. фактически «числовым» характеристикам, относящимся к количеству их элементов, формирующих иерархию трансфинитных чисел, благодаря которым возникает возможность рассуждать об «уровнях бесконечного» [Архангельский, 1988].

В основаниях такого рода возможности лежит машинерия именно лингвистических средств, вводящих абстрактные объекты и откры-

⁷ Этот анализ можно найти, например, в работах Д. Хана [Han, 2010] и С. Крипке [Kripke, 2023].

⁸ Мысленное распределение отрицательных чисел на числовой оси уже не столь «естественное», как положительных [Fischer, Robinson, 2005, p. 30–31]. Кривая распределения больших чисел по числовой оси в массовых явлениях носит логарифмический, а небольших по значению чисел фактически линейный характер [Reyna, Brainerd, 2023, p. 426].



вающих перспективы рассуждениях о таковых [Wiese, 2001, p. 1122]. Введение и операции с большими числами становятся возможными именно благодаря сложным языковым конструкциям [Pitt, Gibson, Piantadosi, 2022, p. 379]. Более того, само понятие бесконечного с определенных позиций может трактоваться как «концептуальная метафора» [Nunez, Lakoff, 2005, p. 112].

О безусловной важности лингвистического оформления числа и числовых выкладок наводит на мысль опора на те или иные цифровые нотации числа, которые также можно отнести к особенностям применения того или иного языка. Если сопоставить арабскую (позиционную) и римскую (непозиционную) нотации, то нетрудно заметить явное – в смысле эффективности операций с числами – преимущество арабской. Те процедуры, которые легко и быстро исполнимы в арабской системе, крайне затруднены и неэффективны в римской. Наверное, не будет большим преувеличением утверждение, что если бы человечество «осталось» только с римской нотацией чисел, то разделами «высшей» математики являлись бы (простые ныне) арифметические действия типа сложения и вычитания, не упоминая операции деления и умножения, которые были бы, вероятно, доступны только особо одаренным математикам.

Заключение

Если генезис и природу числа в отношении к мозгу и его активности попытаться описать в алгебраических терминах (особенно подходящих для данных целей), то число как ментальное образование представляет собой своего рода инъективное отображение⁹ некоторой реальности в нейронных сетях.

С позиций психологизма вопросы о том, в виде чего «существует» число и что выступает его носителем, оказываются во многом лишены смысла. Можно сказать, что такие вопросы здесь запрещены. Подобно тому как в квантовой теории запрещен вопрос о существовании традиционной, понимаемой механически, траектории частицы, так и на вопрос о модусе существования числа в психологизме вряд ли можно получить удовлетворяющий ответ сторонников традиционного подхода к феномену числа. С позиций же психологизма число – это ментальная конструкция, образуемая в процессе взаимодействия с некоторыми видами реальности и выполняющая важные функции их описания и анализа в плане их множественной определенности. Таким образом, в некотором смысле допустимо утверждать, что числа «сочиняются».

⁹ То есть образы различных элементов в ментальной «плоскости», вообще говоря, могут быть различными.



Список литературы

- Архангельский, 1988 – Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. М.: Изд-во Москов. ун-та, 1988.
- Бажанов, 2016 – Бажанов В.А. Дилемма психологизма и антипсихологизма // Эпистемология и философия науки. 2016. № 3. С. 6–16.
- Бажанов, 2019 – Бажанов В.А. Мозг – культура – социум. Кантианская программа в когнитивных исследованиях. М.: Канон+, 2019.
- Нечаев, 1985 – Нечаев В.И. Число. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1985. Т. 5. С. 873–878.
- Ландини, 2024 – Ландини Г. Рассел / Пер. В.В. Целищева. М.: Канон+, 2024.
- Хакинг, 2024 – Хакинг Я. Историческая онтология / Пер. В.В. Целищева. М.: Канон+, 2024.

References

- Abbondanza et al. 2021 – Abbondanza, M., Rinaldi, L. et al. “The Mental Representation of Non-numerical Quantifiers: The Spatial-Linguistic Association of Response Codes (SLARC) Effect”, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 2021, vol. 47 (12), pp. 2021–2028.
- Arkhangel'skii, 1988 – Arkhangel'skii, A.V. *Kantorovskaya teoriya mnozhestv* [Cantor's Set Theory]. Moscow: Moscow State University, 1988. (In Russian)
- Bazhanov, 2016 – Bazhanov, V.A. “Dilemma psikhologizma i antipsikhologizma” [Dilemma of Psychologism and Antipsychologism], *Epistemology & Philosophy of Science*, 2016, no. 3, pp. 6–16. (In Russian)
- Bazhanov, 2019 – Bazhanov, V.A. *Mozg – kul'tura – sotsium. Kantianskaya programma v kognitivnykh issledovaniyakh* [Brain – Culture – Society. Kantian Program in Cognitive Studies]. Moscow: Canon+, 2019. (In Russian)
- Brannon, 2005 – Brannon, E. “What Animals Know about Numbers”, in: J.I.D. Compbell (ed.) *Handbook of Numerical Cognition*. New York: Hove: Psychology Press, 2005, pp. 85–108.
- Britannica – Number, 2024 – Number. [<https://www.britannica.com/science/number-mathematics>, accessed on 14.12.2024].
- Carey, 2018 – Carey, S. “Constructing a Concept of Number”, *Journal of Numerical Cognition*, 2018, vol. 4 (2), pp. 464–493.
- Carey, Barner, 2019 – Carey, S., Barner, D.D. “Ontogenetic Origin of Human Integer Representations”, *Trends in Cognitive Science*, 2018, vol. 23 (10), pp. 823–835.
- Dehaene, 2011 – Dehaene, S. *The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics*. New York; London: Oxford University Press, 2011.
- Deigan, 2024 – Deigan, M. “Having a Concept Has a Cost”, *Synthese*, 2024, vol. 61, Article 61.
- Fayol, Seron, 2005 – Fayol, M., Seron, X. “About Numerical Representations: Insights from Neuropsychological, Experimental, and Developmental Studies”, in: J.I.D. Compbell (ed.) *Handbook of Numerical Cognition*. New York: Psychology Press, 2005, pp. 3–22.



Di Nuovo, Jay, 2019 – Di Nuovo, A., Jay, T. “Development of Numerical Cognition in Children and Artificial Systems: A Review of the Current Knowledge and Proposals for Multidisciplinary Research”, *Cognitive Computation and Systems*, 2019, vol. 1 (1), pp. 2–11.

Fischer, Robinson, 2005 – Fischer, M.N., Robinson, J. “Do Negative Numbers Have a Place on the Mental Number Line?”, *Psychology Science*, 2005, vol. 47 (1), pp. 22–32.

Jenkin, 2020 – Jenkin, Z. “The Epistemic Role of Core Cognition”, *The Philosophical Review*, 2020, vol. 129 (2), pp. 251–298.

Hacking, 2006 – Hacking, I. “Making Up People”, *London Review of Books*, 2006, vol. 28, no. 16, August 17.

Hacking, 2024 – Hacking, I. *Istoricheskaya ontologiya* [Historical Ontology], trans. by V.V. Tselishchev. Moscow: Canon+, 2024. (Trans. into Russian)

Han, 2010 – Han, D. “Wittgenstein and Real Numbers”, *History and Philosophy of Logic*, 2010, vol. 31, no. 3, pp. 219–245.

Heubner et al. 2018 – Heubner, L., Cipora, C. et al. “A Mental Odd-even Continuum Account: Some Numbers May Be ‘More Odd’ Than Others and Some Numbers May Be ‘More Even’ Than Others”, *Frontiers in Psychology*, 2018, vol. 9, Article 1081.

Hogol, 2020 – Hogol, M. *Foundations of Geometric Cognition*. New York, London: Routledge, 2020.

Hyde, 2023 – Hyde, D.C. “Cognitive Neuroscience: An Abstract Sense of Number in the Infant Brain”, *Current Biology*, 2023, vol. 33, pp. R398–R423.

Koch et al., 2023 – Koch, N.N., Huber, J.F. et al. “Mental Number Representations Are Spatially Mapped Both by Their Magnitudes and Ordinal Positions”, *Colloquia. Psychology*, 2023, vol. 9 (1), Article 67908.

Kripke, 2023 – Kripke, S. “Wittgenstein, Russell, and Our Concept of the Natural Numbers”, in: C. Posy, Y. Ben-Menahem (eds.) *Mathematical Knowledge, Objects and Applications. Essays in Memory of Mark Steiner*. Springer, 2023, pp. 137–155.

Kusch – Kusch, M. “Psychologism”, in: E.N. Zalta & U. Nodelman (eds.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2024 Edition). [https://plato.stanford.edu/entries/psychologism/#RecReEva, accessed on: 14.12.2024].

Landini, 2024 – Landini, G. *Russell*, trans. by V.V. Tselishchev. Moscow: Canon+, 2024. (Trans. into Russian)

Li et al., 2024 – Li, Q., Sorcher, B., Sompolinsky, H. “Representations and Generalization in Artificial and Brain Neural Networks”, *PNAS*, 2024, vol. 121, no. 27, Article e2311805121.

Lyons, Beilock, 2013 – Lyons, I.M., Beilock, S.I. “Ordinality and the Number of Symbolic Numbers”, *The Journal of Neuroscience*, 2013, vol. 33 (43), pp. 17052–17061.

Marshall, 2018 – Marshall, O.R. “The Psychology and Philosophy of Natural Numbers”, *Philosophia Mathematica*, 2018, vol. 26 (1), pp. 40–58.

Moser, Furstenberg, 2024 – Moser, E., Furstenberg, A. “Theory and Practice in Neuroscience on Modelling of Thought: An Interview with Edvard I. Moser”, *Human Arenas* 2024, <https://doi.org/10.1007/s42087-024-00436-z> (accessed 14.12.2024).

Nechayev, 1985 – Nechayev, V.I. “Chislo [Number]”, *Mathematical encyclopedia*. Moscow: Soviet encyclopedia, 1985, vol. 5, pp. 873–878. (In Russian)



Nieder, 2016 – Nieder, A. “The Neuronal Code for Number”, *Nature Review Neuroscience*, 2016, vol. 17, pp. 366–382.

Nunez, Lakoff, 2005 – Nunez, R., Lakoff, G. “The Cognitive Foundations of Mathematics. The Role of Cognitive Metaphor”, in: J.I.D. Compbell (ed.) *Handbook of Numerical Cognition*. New York: Hove: Psychology Press, 2005, pp. 109–136.

Pantsar, 2024a – Pantsar, M. “The Cognitive Foundations and Epistemology of Arithmetic and Geometry”, *International Encyclopedia of Philosophy*, 2024 [<https://iep.utm.edu/arithmetic-and-geometry/>, accessed 14.12.2024].

Pantsar, 2024b – Pantsar, M. “Why Do Numbers Exist? A Psychologist Constructivist Account”, 2024. Preprint. <https://doi.org/10.1080/0020174X.2024.2305386>

Piazza, Eger, 2016 – Piazza, M., Eger, E. “Neural Foundations and Functional Specificity of Number Representations”, *Neuropsychologia*, 2016, vol. 83, pp. 257–273.

Pitt et al., 2022 – Pitt, B., Gibson, E., Piantadosi, S.T. “Exact Numbers Are Limited to the Verbal Count Range”, *Psychological Science*, 2022, vol. 33 (1), pp. 371–381.

Reyna, Brainerd, 2023 – Reyna, V.F., Brainerd, C.J. “Numeracy, Gist, Literal Thinking and the Value of Nothing in Decision Making”, *Nature Reviews Psychology*, 2023, vol. 2, pp. 412–439.

Rips et al., 2008 – Rips, L.J., Bloomfield, A., Asmuth, J. “From Numerical Concepts to Concepts of Number”, *Behavioral and Brain Sciences*, 2008, vol. 31 (6), pp. 623–642.

Rudnicki, Lukowski, 2024 – Rudnicki, K., Lukowski, P. “What Should the Logic Formalizing Human Cognition Look Like? Psychologism as Applying Logic in Cognitive Science”, *Logic and Logical Philosophy*, 2024, vol. 33, pp. 225–262.

Sabaghypour et al., 2023 – Sabaghypour, S., Farkhondeh Tale Navi, F. et al. “The Dark and Bright Side of the Numbers: How Emotions Influence Mental Number Line Accuracy and Bias”, *Cognition and Emotion*, 2023, vol. 38 (5), pp. 661–674.

Samuels, Snyder, 2024 – Samuels, R., Snyder, E. *Number Concepts*. Cambridge: Cambridge University Press, 2024.

Seblani et al., 2024 – Seblani, M., Berzun, J.-M. et al. “Rethinking Plasticity: Analyzing the Concept of ‘Destructive Plasticity’ in the Light of Neuroscience Definitions”, *European Journal of Neuroscience*, 2024. Preprint. 1–15. <https://doi.org/0.1111/ejn.16487>

Spelke, 2022 – Spelke, E. *What Babies Know. Core Knowledge and Composition*. Vol. I. Oxford University Press, 2022.

Stone, 2022 – Stone, A. “Psychology and Time in Boole’s Logic”, *History and Philosophy of Logic*, 2022, vol. 44 (1), pp. 1–15.

Tang, Tang, 2022 – Tang, R., Tang, Y.-Y. “Culture and Numerical Cognition”, J.Y. Chiao, S.-C. Li, R. Turner, S.Y. Lee-Tauler, B.A. Pringle (eds.) *Oxford Handbook of Cultural Neuroscience and Global Mental Health*, 2022, pp. 252–261.

Tennant, 2022 – Tennant, N. *The Logic of Number*. Oxford: Oxford University Press, 2022.

Towse et al., 2014 – Towse, J.N., Loetscher, T., Brugger, P. “Not All Numbers Are Rqual: Preference and Biases Among Children and Adults When Generating Random Sequence”, *Frontiers in Psychology*, 2014, vol. 5, Article 19.

Tseng, Cheng, 2024 – Tseng, P., Cheng, T. “Causal Prominence in Neuroscience”, *Nature Reviews. Neuroscience*, 2024, vol. 25, Article 591.



Whalley, 2018 – Whalley, K. “Number Crunching”, *Nature Neuroscience*, 2018, vol. 19, pp. 642.

Wiese, 2001 – Wiese, H. “Did Language Give Us Numbers? Symbolic Thinking and the Emergence of Systematic Numerical Cognition”, in: J.D. Moore, K. Stennig (eds.) *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Edinburgh; N.J. Erlbaum, 2001, pp. 1118–1123.

Wittgenstein’s Lectures – D. Lee (ed.) *Wittgenstein’s Lectures*. Cambridge 1930–32, from the notes of John King and Desmond Lee. D. Mills, Ont.: Oxford University Press, 1980.